

FUNDAMENTOS ALGEBRAICOS

DE LA

PROGRAMACIÓN LINEAL

Del método de Gauss al método Simplex

Joel Ayala de la Vega
Irene Aguilar Juárez
Hipólito Gómez Ayala

Sello editorial



REDEM
RED EDUCATIVA MUNDIAL

Joel Ayala de la Vega

Irene Aguilar Juárez

Hipólito Gómez Ayala

FUNDAMENTOS ALGEBRAICOS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Del método de Gauss al método Simplex



Editorial REDEM: Red Educativa Mundial

FUNDAMENTOS ALGEBRAICOS DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL
Del método de Gauss al método Simplex

© De Joel Ayala de la Vega, Irene Aguilar Juárez, Hipólito Gómez Ayala y para esta edición la Red Educativa Mundial - REDEM.

Para la presente edición:
Editado por Grupo MDM Corp S.A.C.
Para su sello editorial REDEM: Red Educativa Mundial ©
Av. Costanera 2438 Torre "C" Oficina 203 San Miguel, Lima, Perú.
www.redem.org

Primera edición digital, junio del 2026

ISBN: 978-612-99446-3-0

Depósito legal N° 2026-06857

Publicación E-book
Editado y distribuido por REDEM
Libro electrónico disponible en <https://editorial.redem.org>

Todos los derechos reservados. Este libro no podrá ser reproducido por ningún medio, ni total ni parcialmente, sin el previo permiso escrito de su autor y del editor.

Contenido

Contenido	2
Prólogo	5
Introducción	7
Antecedentes	8
Eliminación Gaussiana	8
Programación Lineal	9
Tablero de Tucker	10
Intercambio de Jordan	10
Justificación	10
Objetivos	12
Objetivo General	12
Objetivos Específicos	12
Capítulo I. Fundamentos de álgebra lineal	14
Vectores	14
Espacio Vectorial	15
Combinaciones lineales e independencia	15
Propiedades Clave:	16
Concepto de Base y Conjunto Generador	17
Capítulo II. Intercambio de Jordan	20
Método de Gauss-Jordan.	20
Ejemplos de resolución mediante el método de Gauss-Jordan	23
El algoritmo de intercambio de Jordan	25
Cálculo de la matriz inversa:	26
Ejercicio 6: Inversa de una matriz 2×2 con intercambio de Jordan	26
Importancia del intercambio de Jordan en programación lineal	27
Capítulo III. Cambio de base	28
Conteo de soluciones básicas	28
Intersección entre rectas	31
Tableros finales (Intersección)	31

Capítulo IV. Método simplex vs. Método estándar y método de la gran M.	33
Análisis comparativo de las variantes del método simplex.	33
Manejo de la degeneración	35
Manejo de la dualidad	36
Capítulo V. Problema primal y método simplex	38
Ejemplos geométricos	38
Ejemplo 1: El origen pertenece al espacio factible. Observe gráfica 5.1.	38
Tablero de Tucker	40
Criterio de optimalidad (fase II).	40
Óptimos alternos (o múltiples soluciones)	48
Degeneración	54
Regla práctica	57
FASE I	59
Capítulo VI. Dualidad	73
Capítulo VII. Análisis de sensibilidad.	93
Elementos que se analizan	93
Métodos comunes de análisis de sensibilidad	93
Interpretación geométrica	94
Cambio de la pendiente	94
Análisis de sensibilidad en variables no básicas	96
Interpretación del óptimo	97
Caso crítico: múltiples soluciones óptimas	98
Cambio en la base	98
Extensión del análisis	98
Interpretación geométrica	99
Nota sobre los Tableros	99
Análisis de sensibilidad en variables no básicas.	100
Extensión a mayor dimensión	101
Análisis de sensibilidad para variables básicas.	102
Análisis de sensibilidad para el lado derecho de las restricciones (ldr)	106
Interpretación geométrica	106
Rango de factibilidad	106
Modificación del problema	106

Interpretación del precio sombra	106
Capítulo VIII Programación entera (WOLSEY, 1998).	110
Método de ramificación y acotamiento	111
Algoritmo de Land y Doig	112
Idea general del algoritmo	112
Proceso de ramificación	112
Interpretación de las cotas	113
Representación mediante árbol	113
Estrategia de selección	113
Acotamiento	113
Descripción del algoritmo	114
Conclusión	125
Bibliografía	128
Apéndice A. Eliminación gaussiana e intercambio de Jordan (cálculo detallado)	129
Apéndice B. Cambio de base.	132
Caso B.1: Inversa de una matriz 3x3 con intercambio de Jordan.	132
Apéndice C. Tableros extendidos del método simplex	139
Caso C.1. Múltiples soluciones con tres dimensiones	139
Caso C.2. El origen no pertenece a la región factible abierta	142
Apéndice D. Desarrollo completo del método de ramificación y acotamiento	151

Prólogo

La programación lineal ocupa un lugar central en la matemática aplicada, la ingeniería, la economía y las ciencias de la computación. Su importancia no radica únicamente en la capacidad de formular modelos matemáticos elegantes, sino en su extraordinaria eficacia para resolver problemas reales de asignación de recursos, planificación y toma de decisiones. Desde la logística y los sistemas productivos hasta las finanzas y la inteligencia artificial, muchas decisiones complejas pueden reducirse —y resolverse— mediante modelos lineales cuidadosamente estructurados.

Históricamente, el desarrollo de la programación lineal no puede entenderse sin el álgebra lineal. Las operaciones matriciales, los cambios de base y los sistemas de ecuaciones constituyen el lenguaje natural mediante el cual los algoritmos de optimización describen y exploran el espacio de soluciones. En particular, el método Simplex, propuesto por George B. Dantzig a mediados del siglo XX, materializa de manera ejemplar esta relación profunda entre álgebra, geometría y cómputo.

Este libro nace de la convicción de que el método Simplex se comprende mejor cuando se estudia **paso a paso**, comenzando por sus cimientos algebraicos. En lugar de presentar el Simplex como un conjunto aislado de reglas operativas, la obra propone un recorrido progresivo que inicia con la eliminación gaussiana, continúa con el intercambio de Jordan y culmina en los métodos avanzados de optimización lineal y entera. De este modo, cada algoritmo se revela como una consecuencia natural del anterior, y no como una técnica independiente o arbitraria.

Uno de los ejes distintivos de este texto es el uso sistemático del **Tablero de Tucker**, una representación matricial compacta que permite unificar de manera elegante el tratamiento del problema primal, el dual, la factibilidad y la optimalidad. Acoplado con el algoritmo de intercambio de Jordan, este enfoque proporciona una visión simétrica y estructurada del método Simplex, facilitando tanto su comprensión conceptual como su implementación algorítmica.

A lo largo del libro se privilegia una perspectiva **algebraico-geométrica**: cada cambio de base se interpreta como un desplazamiento entre vértices de un politopo convexo, y cada operación matricial adquiere un significado geométrico tangible. Esta doble lectura — algebraica y geométrica— resulta especialmente valiosa para comprender fenómenos como

la degeneración, los óptimos alternos, la dualidad y la sensibilidad de las soluciones frente a perturbaciones de los parámetros del modelo.

La obra está dirigida a estudiantes de licenciatura avanzada y posgrado en matemáticas, ingeniería, ciencias de la computación e investigación de operaciones, así como a docentes y profesionales interesados en una comprensión profunda y rigurosa de la programación lineal. No se asume únicamente un interés práctico, sino también una disposición a analizar los fundamentos teóricos que explican por qué los algoritmos funcionan y cuáles son sus límites computacionales.

Finalmente, este libro no pretende sustituir a los textos clásicos de programación lineal, sino complementarlos con un enfoque pedagógico distinto: uno que enfatiza la continuidad conceptual desde el álgebra elemental hasta los algoritmos más sofisticados de optimización. Si al concluir su lectura el lector es capaz de ver en el método Simplex no solo un procedimiento mecánico, sino una manifestación coherente de la estructura del álgebra lineal y la geometría convexa, entonces el objetivo fundamental de esta obra habrá sido cumplido.

Introducción

La resolución de problemas complejos no depende únicamente de contar con algoritmos potentes, sino de comprender la **estructura matemática** que los hace posibles. En la programación lineal, dicha estructura se manifiesta en el delicado equilibrio entre álgebra, geometría y decisión, donde cada transformación algebraica tiene una interpretación geométrica precisa y una consecuencia directa sobre la solución del problema.

Este libro propone una lectura del método Simplex que se aleja de la presentación tradicional basada en reglas operativas aisladas. En su lugar, el texto conduce al lector a descubrir el Simplex como un **proceso natural de cambio de base**, profundamente enraizado en los principios del álgebra lineal. A través de este enfoque, la optimización deja de percibirse como una secuencia mecánica de pasos para convertirse en una dinámica coherente de exploración de vértices en espacios convexos.

El uso sistemático del **Tablero de Tucker** y del **intercambio de Jordan** articula una narrativa matemática clara: cada iteración representa una transición estructurada entre soluciones equivalentes, donde la factibilidad, la optimalidad y la dualidad emergen de manera simultánea. Esta visión unificada permite comprender por qué el método Simplex, a pesar de su complejidad teórica en el peor caso, continúa siendo una de las herramientas más eficaces y versátiles en la práctica.

Más allá de resolver problemas, esta obra aspira a desarrollar en el lector una **intuición matemática profunda**, capaz de conectar procedimientos algebraicos, interpretaciones geométricas y decisiones algorítmicas. En ese sentido, el texto no solo enseña a optimizar, sino a **entender qué significa optimizar** dentro del marco riguroso de la matemática aplicada.

Antecedentes

La programación lineal, como disciplina matemática y computacional, no puede entenderse de manera aislada. Su desarrollo es el resultado de una evolución progresiva de ideas algebraicas y geométricas que, a lo largo de más de dos siglos, fueron adquiriendo forma algorítmica. En este contexto, la eliminación gaussiana, el álgebra matricial y los métodos de cambio de base constituyen los pilares conceptuales sobre los cuales se construyen los algoritmos modernos de optimización.

Esta sección presenta los antecedentes históricos y matemáticos fundamentales que permiten comprender el surgimiento del método Simplex y su relación estrecha con el álgebra lineal, enfatizando la continuidad conceptual entre los métodos clásicos de resolución de sistemas lineales y los algoritmos de optimización.

Eliminación Gaussiana

La eliminación gaussiana es un método clásico para resolver sistemas de ecuaciones lineales, atribuido formalmente a Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Sin embargo, las ideas fundamentales del método anteceden por varios siglos a su formalización moderna. En particular, en el texto matemático chino *Jiuzhang Suanshu* (siglo I a. C.) ya aparecen procedimientos análogos de eliminación progresiva de variables mediante operaciones sobre filas, lo que evidencia el carácter histórico y universal de esta técnica.

La contribución de Gauss consistió en proporcionar una formulación sistemática y rigurosa del método, incorporándolo de manera formal al estudio del álgebra lineal y extendiendo su aplicación a problemas científicos y matemáticos de gran escala. A partir de este enfoque, la eliminación de filas se convirtió en una herramienta central para el análisis de sistemas lineales, especialmente en su formulación matricial.

Desde un punto de vista algorítmico, la eliminación gaussiana representa mucho más que una técnica de cálculo: constituye uno de los primeros ejemplos de un **procedimiento estructurado de cambio de base**. Cada operación elemental sobre los renglones de una matriz puede interpretarse como una transformación que preserva el conjunto solución del sistema, principio que más adelante será reutilizado de manera sistemática en los métodos de optimización lineal.

Programación Lineal

Los primeros indicios formales de la programación lineal se remontan a una publicación de Jean-Baptiste Joseph Fourier en 1823, relacionada con la resolución de sistemas de ecuaciones mediante lo que hoy se conoce como eliminación de Fourier. Posteriormente, en 1827, se formuló el primer problema reconocible de programación lineal en términos modernos.

En 1911, Charles-Jean de La Vallée Poussin introdujo un método de aproximación de Chebyshev basado en la minimización de una función lineal sujeta a restricciones lineales. Más adelante, en 1939, Leonid Vitalíyevich Kantoróvich publicó *Métodos matemáticos para la organización y la producción*, obra fundamental que sentó las bases de la programación lineal aplicada a la economía y la producción industrial. No obstante, debido a razones ideológicas, este trabajo permaneció archivado en la Unión Soviética y no tuvo impacto internacional inmediato.

El desarrollo contemporáneo de la programación lineal se atribuye ampliamente a George B. Dantzig, quien, en 1947, como asesor de las Fuerzas Aéreas de los Estados Unidos, formuló modelos matemáticos para la planificación logística y presentó el método Simplex como una herramienta sistemática de optimización. El término “programación lineal” surge en este contexto, donde la palabra *programa* hacía referencia a planes operativos y no a software computacional.

Dantzig reconoció tempranamente la importancia de la geometría del problema: la solución óptima de un problema de programación lineal se localiza en los vértices del politopo que define la región factible. Esta observación permitió reducir un problema continuo infinito a la exploración finita de soluciones extremas, dando origen a uno de los algoritmos más influyentes de la matemática aplicada.

Históricamente, este desarrollo pone de manifiesto que la programación lineal emerge como una extensión natural del álgebra lineal, donde los sistemas de ecuaciones y desigualdades se interpretan como estructuras geométricas manipulables mediante transformaciones matriciales.

Tablero de Tucker

El Tablero de Tucker es una representación matricial estructurada de los problemas de programación lineal que permite organizar, de manera compacta y eficiente, la información correspondiente a las variables, las restricciones y la función objetivo.

Desde una perspectiva computacional, el Tablero puede entenderse como una estructura de datos bidimensional en la que cada fila representa una ecuación y cada columna una variable. Esta organización facilita el seguimiento de las variables básicas y no básicas, así como la aplicación sistemática de operaciones de pivoteo.

A diferencia del Tablero estándar del método Simplex, el Tablero de Tucker presenta una notación más simétrica y compacta, lo que permite integrar de forma natural el análisis primal y dual dentro de una misma estructura matricial. Esta característica resulta especialmente ventajosa tanto para la comprensión teórica como para la implementación algorítmica de los métodos de optimización.

Geométricamente, el Tablero permite identificar de manera explícita los vértices del polítopo factible y evaluar el efecto de las transformaciones matriciales sobre la región de soluciones, estableciendo un puente claro entre álgebra y geometría.

Intercambio de Jordan

El algoritmo de intercambio de Jordan, atribuido a Wilhelm Jordan y estrechamente relacionado con el método de Gauss-Jordan, constituye una herramienta fundamental para la actualización matricial durante los cambios de base. En el contexto de la programación lineal, un pivoteo en el Tablero es algebraicamente equivalente a un cambio de base, lo que corresponde geométricamente al desplazamiento entre vértices adyacentes del polítopo factible.

Esta interpretación unifica el tratamiento algebraico y geométrico del método Simplex: las operaciones matriciales no son meros cálculos formales, sino mecanismos que permiten explorar de manera sistemática la estructura del espacio de soluciones.

Justificación

La programación lineal constituye uno de los pilares fundamentales de la optimización matemática y de la investigación de operaciones, con aplicaciones directas en economía, ingeniería, logística, finanzas y ciencias de la computación. A pesar de la amplia

disponibilidad de textos clásicos sobre el método Simplex, gran parte de la literatura existente presenta los algoritmos como procedimientos operativos independientes, enfatizando la mecánica del cálculo por encima de los principios estructurales que los sustentan.

Esta obra se justifica a partir de la necesidad de **reinterpretar el método Simplex desde una perspectiva unificada**, donde el álgebra lineal, la geometría y el cómputo no se estudien como disciplinas separadas, sino como componentes inseparables de un mismo proceso matemático. En particular, se argumenta que el Simplex es, esencialmente, un algoritmo de **cambio sistemático de bases**, cuya comprensión profunda requiere examinar sus vínculos directos con la eliminación gaussiana y el intercambio de Jordan.

Mientras que el enfoque convencional utiliza el Tablero estándar como herramienta principal, este trabajo propone el **Tablero de Tucker** como una representación matricial más compacta, simétrica y conceptualmente clara. Esta estructura permite integrar de forma natural el análisis de factibilidad, optimalidad y dualidad dentro de un marco algebraico coherente, facilitando tanto la comprensión teórica como la implementación algorítmica.

Desde el punto de vista geométrico, la obra enfatiza la interpretación del método Simplex como un recorrido estructurado entre los vértices de un poliedro convexo. Esta lectura geométrica no solo clarifica fenómenos como la degeneración, los óptimos alternos y la sensibilidad, sino que también permite visualizar el significado matemático de cada operación matricial realizada durante el algoritmo.

Adicionalmente, aunque existen algoritmos de complejidad polinomial para la resolución de problemas de programación lineal, como el método del elipsoide o los métodos proyectivos, el Simplex continúa siendo el método predominante en aplicaciones reales. Esto hace pertinente un estudio que no se limite a su uso práctico, sino que examine las razones estructurales y matemáticas que explican su eficacia computacional en la mayoría de los casos.

Finalmente, esta obra busca contribuir al ámbito académico ofreciendo un texto que sirva tanto como **material didáctico avanzado** como **referencia conceptual**, especialmente para estudiantes y docentes interesados en comprender la optimización desde sus fundamentos algebraicos. El énfasis en la continuidad conceptual desde el álgebra lineal elemental hasta la programación entera pretende fortalecer la formación matemática del lector y dotarlo de herramientas analíticas transferibles a otros contextos de optimización.

Objetivos

Objetivo General

Desarrollar de manera estructurada y rigurosa los fundamentos algebraicos, geométricos y algorítmicos del método Simplex, estableciendo una continuidad conceptual desde la eliminación gaussiana y el intercambio de Jordan hasta la programación lineal, la dualidad, el análisis de sensibilidad y la programación entera, utilizando el Tablero de Tucker como herramienta central de representación y análisis.

Objetivos Específicos

- Presentar los fundamentos del álgebra lineal necesarios para comprender los algoritmos de programación lineal, enfatizando los conceptos de espacio vectorial, base, independencia lineal y cambio de base.
- Analizar el método de eliminación de Gauss y el método de Gauss–Jordan como antecedentes directos del intercambio de variables empleado en el método Simplex.
- Demostrar la equivalencia algebraica entre el intercambio de Jordan y los procedimientos clásicos de eliminación matricial, resaltando su utilidad en la actualización eficiente de bases.
- Introducir el Tablero de Tucker como una representación matricial compacta que unifica el tratamiento del problema primal, dual, la factibilidad y la optimalidad.
- Estructurar el método Simplex primal de dos fases empleando el intercambio de Jordan, explicando de manera detallada los criterios de selección de variables entrantes y salientes.
- Formalizar el método Simplex dual y analizar su relación con la factibilidad y la optimalidad del problema primal.
- Estudiar fenómenos propios de la programación lineal, tales como la degeneración, los óptimos alternos, la no acotación y la infactibilidad, mediante interpretaciones algebraicas y geométricas.
- Desarrollar el análisis de sensibilidad para evaluar el impacto de variaciones en los coeficientes de la función objetivo, los términos independientes y las restricciones.
- Introducir los fundamentos de la programación entera y detallar la aplicación del método de Ramificación y Acotamiento, destacando el papel del Simplex como subrutina fundamental.

- Evaluar las ventajas del uso del Tablero de Tucker en términos de claridad conceptual, eficiencia computacional y optimización de memoria frente a otras representaciones tradicionales.

Capítulo I. Fundamentos de álgebra lineal

14

El álgebra lineal constituye el lenguaje fundamental de la programación lineal y de los algoritmos de optimización. Más allá de su estudio formal como disciplina matemática, proporciona la estructura algebraica y computacional necesaria para modelar sistemas de restricciones, describir espacios de búsqueda y formalizar los cambios de solución que ocurren durante la ejecución de un algoritmo.

En el contexto del método Simplex, los conceptos de vector, base, independencia lineal y cambio de base adquieren un significado operativo preciso: cada iteración del algoritmo corresponde a la sustitución controlada de una base por otra, preservando la factibilidad y mejorando la función objetivo.

El propósito de este capítulo es establecer los fundamentos de álgebra lineal indispensables para comprender el comportamiento matemático del método Simplex y sus variantes. En lugar de presentar estos conceptos de manera aislada, se enfatiza su interpretación geométrica y algorítmica, de modo que cada definición se conecte naturalmente con los procedimientos de optimización que serán desarrollados en los capítulos posteriores.

Vectores

En física clásica, un vector suele representarse como un segmento rectilíneo definido por una magnitud y una dirección en el espacio. Sin embargo, para el modelado computacional y la optimización, es más riguroso y conveniente definir un vector en $\mathbb{R}^n$ como una n -tupla ordenada de números reales. Esta abstracción permite tratar a los vectores como estructuras de datos unidimensionales (arreglos o *arrays*) que almacenan la información de las variables de un sistema.

Geométricamente, asumimos la convención de que todos los vectores tienen su punto de origen en el origen del sistema coordenado $(0,0,\dots,0)$. De esta forma, existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y los vectores.

Un vector en dos dimensiones se denota como $a = (a_1, a_2)$ y su magnitud (o norma euclidiana) está determinada por:

14

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Su dirección en R^2 queda caracterizada trigonométricamente por el ángulo Θ :

$$\cos(\Theta) = a_1 / \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{y} \quad \text{Tang}(\Theta) = a_2 / a_1$$

En términos generales, un vector v de n -componentes es un elemento de R^n y puede representarse matricialmente como un vector columna o vector fila:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad v^n = [v_1, \quad \dots \quad v_n]$$

Donde cada $v_i \in R$ es una componente (o escalar) del vector, y n define la dimensión del espacio vectorial.

En programación lineal, los vectores no solo representan magnitudes geométricas, sino estados del sistema. Cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ describe una asignación específica de recursos, y el conjunto de todos los vectores factibles define el espacio sobre el cual opera el algoritmo de optimización.

Espacio Vectorial

Un espacio vectorial (o espacio lineal) es una estructura algebraica formada por un conjunto no vacío de elementos llamados *vectores*, en el cual se definen de manera rigurosa dos operaciones: la adición de vectores y la multiplicación por un escalar (que pertenece a un cuerpo, como los números reales R).

Computacionalmente, los espacios vectoriales proporcionan el marco exacto para delimitar el "espacio de búsqueda" de un algoritmo. En programación lineal, las variables de decisión de un problema constituyen un vector $x \in R^n$. El conjunto de todas las combinaciones posibles de asignación de recursos reside dentro de este espacio, y las operaciones de escalamiento y suma vectorial son las que permiten al algoritmo transitar de una solución a otra.

Combinaciones lineales e independencia

Un vector w se denomina *combinación lineal* de un conjunto de vectores $\{v_1 \quad \dots \quad v_m\}$ si puede expresarse mediante la suma ponderada de dichos vectores multiplicados por escalares:

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_m v_m = \sum_{i=1}^m c_i v_i$$

Donde $c_i \in R$ son constantes escalares.

Cualquier vector en R^3 , por ejemplo, puede expresarse como combinación lineal de los vectores de la base canónica estándar: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$.

Si $v = (a, b, c)$, entonces $v = ae_1 + be_2 + ce_3$

Ejemplo Analítico:

Para expresar el vector $z = (2,1)$ como combinación lineal de $x = (3, -2)$ e $y = (1,4)$, se plantea:

$$(2,1) = a(3, -2) + b(1,4)$$

$$(2,1) = (3a + b, -2a + 4b)$$

Esto genera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3a + b = 2$$

$$-2a + 4b = 1$$

La resolución de este sistema nos dará los escalares exactos a y b que satisfacen la combinación lineal.

Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1 \quad \dots \quad v_m\}$ es **linealmente dependiente** si existe una combinación lineal igual al vector nulo donde *no todos* los escalares son cero. Es decir, existen escalares k_i , con al menos algún $k_i \neq 0$, tal que:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_m v_m$$

Conceptualmente, la dependencia lineal indica redundancia; al menos un vector del conjunto puede expresarse en función de los demás, lo que en programación lineal se traduce como una restricción geométrica repetida o redundante que no aporta nueva información al politopo.

Por el contrario, el conjunto es **linealmente independiente** si la única forma de satisfacer la ecuación anterior es mediante la *solución trivial*:

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$$

Propiedades Clave:

1. Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, cualquier subconjunto de él también lo es.

2. El número máximo de vectores linealmente independientes en R^n es exactamente n . Este principio es la piedra angular para la generación de bases.
3. En el análisis de algoritmos, garantizar la independencia lineal de las filas de una matriz de restricciones asegura que el sistema tenga solución única y que no se desperdicien ciclos de reloj procesando hiperplanos duplicados.

Concepto de Base y Conjunto Generador

Un conjunto de vectores genera o "engendra" un espacio vectorial si todo vector de dicho espacio puede escribirse como una combinación lineal de ellos. En el diseño de algoritmos de optimización, el **conjunto generador** representa las direcciones mediante las cuales se pueden alcanzar todos los puntos del espacio de soluciones factibles.

Una **Base** de R^n es un conjunto generador mínimo. Formalmente, un subconjunto de vectores es una base si cumple dos condiciones ineludibles:

1. Genera a todo el espacio R^n .
2. Es un conjunto linealmente independiente.

En la programación lineal, el concepto matemático de base está directamente vinculado a las "soluciones básicas". El método Simplex selecciona una base de vectores columna a partir de la matriz de restricciones. Esta base matricial de tamaño $m \times n$ (donde m es el número de restricciones) define un único punto en el espacio (un vértice del poliedro).

Cambio de Base

La iteración central del método Simplex consiste precisamente en un **cambio de base**. Si poseemos una base de n vectores para R^n y deseamos introducir un nuevo vector b al conjunto, podemos expulsar un vector de la base original siempre y cuando el coeficiente de dicho vector saliente en la combinación lineal que forma a b sea distinto de cero. Este pivoteo algorítmico garantiza que el nuevo conjunto conformado siga siendo una base válida y, geométricamente, representa el "caminar" de un vértice del poliedro a su vértice adyacente.

Base Ortogonal y Ortonormal

Dos vectores $u, v \in R^n$ son ortogonales si su producto punto algebraico es nulo:

$$u^T v = \langle u, v \rangle = 0$$

Un conjunto de n vectores forma una **base ortogonal** si todos los vectores son mutuamente ortogonales entre sí ($\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$).

Si además de ser mutuamente ortogonales, la norma de cada vector es exactamente igual a 1 ($\|v_i\| = 1$), se dice que la base es **ortonormal**. Estas bases son de alta eficiencia computacional porque la inversión de su matriz asociada es simplemente su transpuesta ($A^{-1} = A^T$), minimizando la complejidad algorítmica.

En el método Simplex, una base no es únicamente un concepto algebraico, sino una estructura operativa que define una solución básica factible. Cada cambio de base corresponde a una nueva solución, y el algoritmo avanza seleccionando aquellas bases que mejoran sistemáticamente el valor de la función objetivo.

Espacio Convexo y Poliedros

La convexidad permite, bajo ciertas condiciones, que los óptimos locales coincidan con los óptimos globales.

Espacio Convexo:

Un subconjunto C de un espacio vectorial es convexo si, dados dos puntos cualesquiera $x, y \in C$, el segmento de recta que los une está contenido íntegramente en C . Analíticamente, para cualquier escalar $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C:$$

Si el algoritmo navega por la frontera de un espacio convexo, está matemáticamente garantizado que no quedará atrapado en un "callejón sin salida" u óptimo local falso.

Poliedros y Politopos:

En programación lineal, las inecuaciones de las restricciones $Ax \leq b$ dividen el espacio en semiespacios.

- **Poliedro:** Es la región geométrica formada por la intersección de un número finito de semiespacios. Representa la *región factible* del problema.
- **Politopo:** Si el poliedro está acotado (no se extiende hacia el infinito), se le denomina politopo.
- **Vértice (Punto Extremo):** Un punto x_0 en el poliedro es un vértice si es la intersección única de n hiperplanos linealmente independientes.

La propiedad fundamental de que una solución óptima se localiza en un vértice del poliedro factible justifica el diseño del método Simplex: recorrer sistemáticamente las aristas del

politopo evaluando únicamente soluciones extremas. Esta idea guiará el desarrollo algorítmico presentado en los capítulos siguientes.

Capítulo II. Intercambio de Jordan

El presente capítulo tiene como propósito fundamental demostrar la equivalencia matemática entre el algoritmo de «intercambio de Jordan» y el tradicional método de eliminación de Gauss-Jordan en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

De manera formal, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se representa como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Esta formulación se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:

$$Ax = b$$

Donde:

- A es la matriz que contiene los coeficientes del sistema y, para este contexto, es una matriz cuadrada de orden n (dimensiones $n \times n$).
- x es el vector columna que contiene a las incógnitas del sistema $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- b es el vector columna que contiene a los términos independientes.

Cabe recordar que el método de Gauss-Jordan, típicamente estudiado en la asignatura de Métodos Numéricos, presenta dos resultados fundamentales (siempre y cuando la matriz A sea de rango completo):

1. Al término de la ejecución del algoritmo, se obtiene la solución del sistema de ecuaciones lineales.
2. De manera simultánea, se obtiene la matriz inversa de A .

En este capítulo se calculará la inversa de una matriz por medio del método de Gauss-Jordan y, posteriormente, se utilizará el algoritmo de intercambio de Jordan. Este enfoque comparativo permitirá validar el algoritmo de intercambio de Jordan para poder utilizarlo con seguridad en los capítulos posteriores.

Método de Gauss-Jordan.

El método de Gauss-Jordan se fundamenta en la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre los renglones de una matriz. Para comprender su mecánica, es esencial destacar dos aspectos principales:

1. **Operaciones elementales:** Consisten en un conjunto de tres transformaciones válidas que permiten producir una matriz equivalente B de tamaño $n \times n$ a partir de una matriz original A del mismo tamaño, preservando el conjunto solución del sistema.
2. **Matriz aumentada y pivoteo:** Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, se construye una matriz extendida concatenando el vector de términos independientes b y una matriz identidad I de orden n . Utilizando los elementos de la diagonal principal como pivotes, las transiciones del algoritmo operan de la siguiente manera:

$$[A|b|I] \rightarrow n \text{ transiciones} \rightarrow [I|x|A^{-1}]$$

En consecuencia, después de completar las n transiciones, el vector b se transforma en el vector solución x , la matriz de coeficientes A se reduce a la matriz identidad I , y la matriz identidad original se convierte en la matriz inversa A^{-1} .

Operaciones elementales por renglón

Dada una matriz A , las tres operaciones elementales válidas sobre sus filas (o renglones) y sus correspondientes matrices elementales son:

1. **Intercambio de renglones ($R_s \leftrightarrow R_k$):**

Consiste en permutar la posición de dos filas. Su matriz de operación asociada, $E^{s,k}$, es la matriz identidad en la que se han intercambiado las columnas (o filas) s y k .

2. **Multiplicación por un escalar no nulo ($R_s \leftarrow \alpha R_s$ con $\alpha \neq 0$):**

Consiste en multiplicar todos los elementos de la fila s por una constante α . Su matriz de operación, $E^s(\alpha)$, corresponde a la matriz identidad donde el elemento en la posición (s, s) ha sido reemplazado por el escalar α .

3. **Suma de un múltiplo de una fila a otra ($R_s \leftarrow R_s + R_r$):**

Consiste en sumar a la fila s los elementos de la fila r previamente multiplicados por un escalar α . La matriz de operación asociada, $E_r^s(\alpha)$, es la matriz identidad que contiene el valor α en la intersección de la fila s y la columna r .

Ejemplo del punto uno:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Se permuta la primera hilera por la segunda hilera ($r_1 \leftrightarrow r_2$), por lo que la matriz resultante será:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

La matriz elemental será:

$$E^{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta forma:

$$B = E^{1,2}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ Por lo que } A \sim B.$$

Ejemplo del punto dos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad r_1 = 5r_1$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz elemental será:

$$E^1(5) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta forma:

$$B = E^1(5)A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ Por lo que } A \sim B.$$

Ejemplo del punto tres:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Se realiza la siguiente operación: $r_2 \leftarrow r_2 + 3r_3$

$$r_2 \rightarrow \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$3r_3 \rightarrow \underline{\begin{array}{ccc} 12 & 6 & 6 \end{array}}$$

$$r_2 \rightarrow \begin{array}{ccc} 15 & 8 & 7 \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 15 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz elemental será:

$$E_3^2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que:

$$B = E_3^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 15 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ Por lo que } A \sim B.$$

A continuación, se presentan ejemplos prácticos. En cada uno de ellos, la resolución se llevará a cabo primero mediante el método de Gauss-Jordan y, posteriormente, aplicando el algoritmo de intercambio de Jordan.

Ejemplos de resolución mediante el método de Gauss-Jordan

El primer paso del algoritmo consiste en construir una matriz aumentada (o ampliada) concatenando la matriz original A con una matriz identidad I del mismo orden. Esta estructura se denota matemáticamente como $[A|I]$.

Mediante la aplicación sistemática de operaciones elementales por renglón, se ejecutará la siguiente transformación algorítmica:

Ejercicio 1: Inversa de una matriz de tamaño 2×2 :

Dada la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

El primer paso consiste en construir la matriz aumentada $[A|I]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A continuación, se aplican las operaciones elementales por renglón para anular los elementos fuera de la diagonal principal. Para evitar trabajar con fracciones en esta etapa, se realizarán las siguientes transformaciones simultáneas:

- $R_1 \leftarrow 4R_1 - 3R_2$
- $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$

Cálculos auxiliares de las operaciones fila:

Para el nuevo Renglón 1 (R_1):

$$\text{Para el } R_1 = 4R_1 - 3R_2 \quad \begin{array}{cccc} 4 & 12 & 4 & 0 \\ -6 & -12 & 0 & -3 \\ \hline -2 & 0 & 4 & -3 \end{array} \quad \text{nuevo}$$

Renglón 2 (R_2):

$$R_2 = R_2 - 2R_1 \quad \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & -2 & 0 \\ \hline 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}$$

Sustituyendo estos

resultados, la matriz resultante es:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

El último paso del método de Gauss-Jordan es multiplicar cada renglón por el escalar necesario para convertir los pivotes de la diagonal principal en 1 (normalización):

- $R_1 \leftarrow (-1/2)R_1$
- $R_2 \leftarrow (-1/2)R_2$

Al haber transformado el lado izquierdo en la matriz identidad I , el lado derecho corresponde a la matriz inversa buscada:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para validar el resultado, se realiza el producto de matrices, calculando cada elemento A_{ij} de la matriz resultante:

$$a_{11} = 1(-2) + 3(1) = 1$$

$$a_{12} = 1(3/2) + 3(-1/2) = 0$$

$$a_{21} = 2(-2) + 4(1) = 0$$

$$a_{22} = 2(3/2) + 4(-1/2) = 1$$

El resultado conforma la matriz identidad, confirmando que la inversa calculada es correcta.

El algoritmo de intercambio de Jordan

A diferencia de los métodos de eliminación tradicionales, en el algoritmo de intercambio de Jordan no se incluye la matriz identidad adjunta; el procedimiento opera única y directamente sobre la matriz original A .

En cada iteración, se selecciona un elemento de la matriz como **pivote**, ubicado en la intersección de la fila r y la columna s . Denotaremos a este elemento como a_{rs} . Las transformaciones para generar la nueva matriz equivalente (cuyos elementos denotaremos como a'_{rs}) siguen estrictamente estas cuatro reglas:

1. **El elemento pivote:** Se sustituye por su inverso multiplicativo.

$$a'_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}$$

2. **El renglón del pivote:** Cada elemento de la fila del pivote se divide entre el valor del pivote.

$$a'_{rj} = a_{rj} / a_{rs} \quad j \neq s$$

3. **La columna del pivote:** Cada elemento de la columna del pivote se divide entre el valor del pivote, con signo contrario.

$$a'_{is} = -a_{is} / a_{rs} \quad i \neq r$$

4. **El resto de la matriz (Regla del rectángulo):** Para todos los elementos que no comparten ni fila ni columna con el pivote, se aplica la siguiente fórmula:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}} \quad i \neq r, \quad j \neq s$$

De manera visual, un elemento pivote $a_{\{rs\}}$ dentro de una matriz A de tamaño $n \cdot n$ se representa de la siguiente forma (Arjona, 1987):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa:

Para obtener la inversa de la matriz (A^{-1}) utilizando este algoritmo, es necesario realizar n intercambios sucesivos (transiciones). El procedimiento estándar exige tomar como pivotes secuenciales a todos los elementos de la diagonal principal. Es decir, el primer intercambio utilizará como pivote al elemento a_{11} , el segundo intercambio al elemento a_{22} , y así sucesivamente, hasta concluir con el elemento a_{nn} .

Ejercicio 6: Inversa de una matriz 2×2 con intercambio de Jordan

Sea

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Primer pivote: a_{11}

- 1) $a'_{11} = 1/1 = 1$
- 2) $a'_{12} = 3/1 = 3$
- 3) $a'_{21} = -(2)/1 = -2$
- 4) $a'_{22} = 4-(2*3)/1 = -2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Segundo pivote: a_{22}

- 1) $a'_{22} = 1/(-2) = -1/2$
- 2) $a'_{21} = (-2)/(-2) = 1$
- 3) $a'_{12} = -(3)/(-2) = 3/2$
- 4) $a'_{11} = 1-(3*-2)/(-2) = -2$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$$

Comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & \frac{3}{2} \\ & & 1 \\ & & -\frac{1}{2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Importancia del intercambio de Jordan en programación lineal

El intercambio de Jordan resulta especialmente adecuado para la programación lineal por las siguientes razones:

- Opera directamente sobre la matriz del sistema sin ampliar artificialmente su dimensión.
- Formaliza de manera explícita el cambio de variables básicas y no básicas.
- Facilita la integración del problema primal y dual en una misma estructura matricial.
- Constituye la base algebraica del Tablero de Tucker, utilizado en los capítulos posteriores.

En este contexto, el intercambio de Jordan no debe entenderse como un método alternativo a Gauss–Jordan, sino como su **especialización natural** para problemas de optimización.

Síntesis del capítulo

En este capítulo se introdujo el intercambio de Jordan como una herramienta algebraica fundamental para el análisis de cambios de base en sistemas lineales. Se demostró su equivalencia con el método de Gauss–Jordan y se destacó su ventaja operativa al trabajar directamente sobre la matriz del sistema.

Asimismo, se estableció la interpretación geométrica del intercambio como un desplazamiento entre vértices de un polítopo convexo, preparando el terreno para su aplicación sistemática en el método Simplex y en el uso del Tablero de Tucker, que serán desarrollados en los capítulos siguientes.

Capítulo III. Cambio de base

Como se observó en capítulos anteriores, el método de Gauss-Jordan utiliza la matriz identidad como herramienta fundamental en la transformación de sistemas lineales. En su forma aumentada, el sistema se expresa como:

$$[A|I]$$

A través de operaciones elementales, es posible transformar la matriz A en la identidad, obteniendo simultáneamente su inversa (Método de Gauss-Jordan).

En el contexto de programación lineal, este proceso se interpreta de manera más profunda como un **cambio de base**. En lugar de centrarse únicamente en operaciones algebraicas, el método consiste en sustituir un conjunto de variables básicas por otro, manteniendo la equivalencia del sistema. Cada uno de estos cambios corresponde a una nueva solución básica.

Geométricamente, un cambio de base equivale a desplazarse entre los **vértices de un poliedro factible**, definidos por la intersección de hiperplanos asociados a las restricciones del sistema.

Conteo de soluciones básicas

Si se tienen m ecuaciones con n variables ($n \geq m$), el número máximo de soluciones básicas posibles está dado por:

$$N = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Cada una de estas combinaciones corresponde a una posible base y, por tanto, a un vértice del poliedro.

Desde el punto de vista del análisis de algoritmos, el método simplex puede, en el peor de los casos, recorrer un número exponencial de bases posibles ya que puede recorrer hasta 2^n bases distintas, como lo demuestra el ejemplo de Klee–Minty. Esto no es un detalle menor: implica que el tiempo de ejecución crece de manera explosiva conforme aumenta el tamaño del problema. En términos formales, esto sitúa al método dentro de un comportamiento **intratable en el peor caso**, ya que el crecimiento exponencial puede volver impráctica la resolución computacional para instancias grandes. Este hecho revela una característica

fundamental de la computación: incluso problemas que son perfectamente resolubles pueden escapar a toda viabilidad práctica debido a su complejidad estructural. En este sentido, la dificultad computacional depende principalmente de la estructura del problema.

Sin embargo, y de manera notable, el método simplex muestra un desempeño eficiente en la gran mayoría de los casos reales, lo que pone de manifiesto una tensión central en la teoría de la complejidad: la diferencia entre el comportamiento teórico en el peor caso y el comportamiento observado en la práctica (Dasgupta, 2006).

A continuación, se presentan ejemplos en dos dimensiones que permiten visualizar de manera más clara el concepto de cambio de base y su interpretación geométrica.

Ejercicio 1

Obtener todas las **soluciones básicas** del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

Para analizar las soluciones básicas, el sistema se expresa en forma estándar introduciendo variables básicas:

$$2x_1 + x_2 + y_1 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + y_2 = 2$$

De esta forma, el sistema tiene **4 variables**:

$$(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

y **2 ecuaciones**.

El número de soluciones básicas posibles está dado por:

$$N = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Cada solución básica se obtiene seleccionando **2 variables básicas** y haciendo las demás iguales a cero.

Por lo tanto, las posibles bases son:

$$(x_1, x_2), (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (y_1, y_2)$$

Cada una de estas combinaciones define una solución básica distinta.

En particular, la base (y_1, y_2) corresponde a:

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

lo cual representa el origen, es decir, la intersección de los ejes coordenados.

En el Tablero 3.1 se ilustran las intersecciones de cada una de las rectas con los ejes coordenados; finalmente, se muestra el punto de intersección entre ambas rectas.

Tabla 3.1

Tabla inicial $|A|I|$

Base	x_1	x_2	b	y_1	y_2
y_1	2	1	2	1	0
y_2	1	2	2	0	1

Cambio de base $y_1 \leftrightarrow x_1$

Base	y_1	x_2	b	x_1	y_2
x_1	1	$1/2$	1	$1/2$	0
y_2	0	$3/2$	1	$-1/2$	1

$P_1 = (1,0)$

Cambio de base $y_1 \leftrightarrow x_2$

Base	x_1	y_1	b	x_2	y_2
x_2	2	1	2	1	0
y_2	3	0	2	2	-1

$P_2 = (0,2)$

Cambio de base $y_2 \leftrightarrow x_1$

Base	y_2	x_2	b	y_1	x_1
y_1	0	-3	-2	1	-2
x_1	1	2	2	0	1

$P_3 = (2,0)$

Cambio de base $y_2 \leftrightarrow x_2$

Base	x_1	y_2	b	y_1	x_2
y_1	$3/2$	0	1	1	$-1/2$
x_2	$1/2$	1	1	0	$1/2$

$P_4 = (0,1)$

Intersección entre rectas

Siendo el ejercicio de dos ecuaciones con las incógnitas x_1 y x_2 , solo se tiene una intersección donde se localiza la solución del sistema de ecuaciones. Sin embargo, ya teniendo una de las columnas unitarias transformadas, se puede usar una de ellas para el cambio de variable. En la primera tabla se usó el del cambio de base $y_1 \leftrightarrow x_1$ y posteriormente se aplicó el cambio de base $y_2 \leftrightarrow x_2$. El siguiente Tablero se aplicó el cambio de base $y_2 \leftrightarrow x_1$ y cambio de base $y_1 \leftrightarrow x_2$.

Tableros finales (Intersección)

Tablero resultante $|I|A^{-1}|$

Base	y_1	y_2	b	x_1	x_2
x_1	1	0	2/3	2/3	-1/3
x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3

Intersección: (2/3 , 2/3)

O, primero se usa la tabla del cambio de base $y_2 \leftrightarrow x_1$ y posteriormente se realiza el cambio de base $x_2 \leftrightarrow y_1$.

	y_2	y_1	b	x_2	x_1
x_2	0	1	2/3	-1/3	2/3
x_1	1	0	2/3	2/3	-1/3

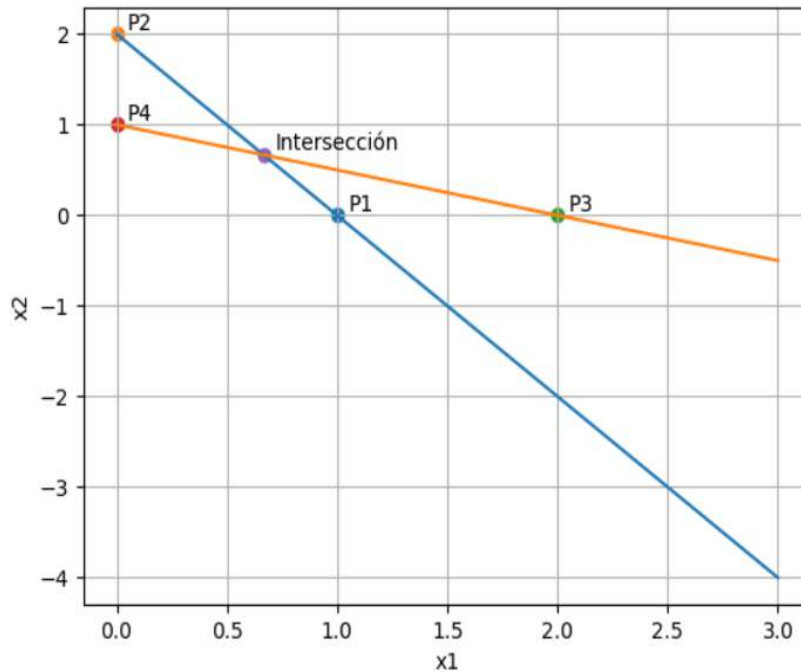
Comprobación:

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 2 & -1/3 & 2/3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 2 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

En la gráfica 3.1 se observan los 6 cambios de base, incluido el punto $P_0=(0,0)$.

Gráfica 3.1 Los 6 cambios de base del ejercicio 1



Síntesis del capítulo

En este capítulo se formalizó el concepto de cambio de base como el mecanismo algebraico esencial que sustenta el método Simplex. Se analizó su interpretación geométrica como desplazamiento entre vértices del conjunto factible y su papel operativo en la generación de soluciones básicas factibles.

Asimismo, se estableció que el intercambio de Jordan constituye la herramienta algebraica natural para implementar estos cambios de base de manera eficiente, preparando el terreno para el desarrollo detallado del método Simplex en los capítulos siguientes.

Capítulo IV. Método simplex vs. Método estándar y método de la gran M.

33

Hay que recordar que el método simplex se refiere a la optimización de recursos (minimización de costos o maximización de ganancias. Las restricciones son lineales y forman generalmente un poliedro (un espacio convexo bien definido). La función objetivo a maximizar (o minimizar) es una función lineal que generalmente en su inicio toca al origen ($f(x)=0$). La idea es transportar la función objetivo hasta que se tenga un máximo o un mínimo sin que la función objetivo se salga del poliedro. Generalmente, si el problema tiene solución, la función objetivo tocará al vértice con máxima ganancia o con mínimo costo.

Aunque existen algoritmos de complejidad polinomial para resolver problemas de Programación Lineal, como el **algoritmo del elipsoide de Leonid Khachiyan (1979)** o el **algoritmo proyectivo de Narendra Karmarkar (1984)**, en la práctica estos métodos no se utilizan con tanta frecuencia como el método simplex. La principal razón es que, a pesar de su mejor comportamiento teórico (tiempo polinomial garantizado), estos algoritmos suelen ser **menos eficientes en aplicaciones reales**. Presentan desventajas como mayor complejidad en su implementación, mayores requerimientos computacionales en términos de precisión numérica, y menor rendimiento práctico en problemas de tamaño moderado o grande.

Por otro lado, el método simplex, aunque en el peor de los casos tiene complejidad exponencial, ha demostrado tener un **excelente desempeño en la práctica**, resolviendo la mayoría de los problemas reales de manera rápida y eficiente. Además, es más intuitivo, más fácil de implementar y se adapta mejor a diversas variantes del problema.

Por estas razones, en aplicaciones reales y en la mayoría del software de optimización, se sigue prefiriendo el método simplex (en sus distintas versiones como estándar, gran M o intercambio de Jordan), mientras que los métodos polinomiales se valoran principalmente por su importancia teórica dentro de la complejidad algorítmica.

Análisis comparativo de las variantes del método simplex.

El método simplex, propuesto por George Dantzig en 1945, constituye uno de los algoritmos más utilizados para la resolución de problemas de Programación Lineal. A pesar de que,

33

desde el punto de vista de la complejidad algorítmica, no es un algoritmo de tiempo polinomial, su desempeño práctico ha demostrado ser altamente eficiente en una amplia variedad de aplicaciones reales.

Existen diversas variantes del método simplex, entre las que destacan el simplex estándar, el método de la Gran M y el método de intercambio de Jordan. Cada uno presenta características particulares en términos de manejo de factibilidad inicial, degeneración y dualidad.

- **Método Simplex Estándar**

El método simplex estándar parte del supuesto de que el problema cuenta con una solución básica factible inicial, típicamente asociada al origen. Esta condición restringe su aplicabilidad directa a problemas en los que las restricciones permiten construir fácilmente dicha solución inicial.

Una de sus principales limitaciones radica en el fenómeno de la degeneración, el cual ocurre cuando una o más variables básicas toman valor cero. En estos casos, el algoritmo puede experimentar ciclos o estancamientos, lo que compromete su eficiencia. Si bien existen reglas anticiclo (como la regla de Bland), estas no eliminan completamente el problema, sino que lo mitigan.

Adicionalmente, aunque el método simplex permite interpretar el problema dual y obtener información económica relevante (como precios sombra), esta relación no siempre se explota de manera estructurada dentro del proceso iterativo.

En resumen:

El método simplex estándar no constituye un algoritmo completo, sino una herramienta válida únicamente bajo condiciones iniciales favorables.

- **Método de la Gran M**

El método de la Gran M surge como una estrategia para abordar problemas en los que no se dispone de una solución básica factible inicial, particularmente cuando el punto inicial no se encuentra en el origen. Para ello, introduce variables artificiales penalizadas en la función objetivo mediante un parámetro M suficientemente grande.

Si bien este enfoque garantiza la obtención de una solución inicial, presenta desventajas importantes, como la inestabilidad numérica asociada a la elección del parámetro M y la falta

de interpretación física de las variables artificiales. Además, no ofrece mejoras sustanciales en el tratamiento de la degeneración ni en la integración del problema dual.

- **Método de Intercambio de Jordan**

El método de intercambio de Jordan representa una alternativa más estructurada y teóricamente robusta, particularmente en lo que respecta al manejo de la factibilidad inicial, la degeneración y la dualidad.

Fase 1 y sus ventajas en el método de intercambio de Jordan

La **Fase 1** en los métodos de programación lineal corresponde a un procedimiento inicial cuyo objetivo es **encontrar una solución básica factible** cuando ésta no es evidente o cuando el problema no parte de un punto inicial en el origen. En métodos tradicionales, como el de dos fases o el método de la Gran M, esta etapa se logra mediante la introducción de variables artificiales que permiten construir una base inicial factible.

Ventajas de la Fase 1 en el método de intercambio de Jordan

A diferencia del método de la Gran M, el intercambio de Jordan permite implementar una **fase 1 implícita**, sin necesidad de introducir variables artificiales ni penalizaciones arbitrarias en la función objetivo. Este enfoque se basa en transformaciones sistemáticas del Tablero que conducen progresivamente hacia la factibilidad primal y/o dual.

Esto implica que, incluso cuando el problema no parte de una solución en el origen, el método puede conducir al espacio factible mediante operaciones algebraicas controladas, evitando los problemas asociados al escalamiento numérico y a la elección del parámetro M.

Además, al no depender de variables artificiales, el método mantiene una **interpretación más limpia del modelo**, mejora la estabilidad numérica y facilita la integración con el análisis dual. En conjunto, estas características hacen que la fase 1 dentro del intercambio de Jordan sea más robusta y conceptualmente elegante que en los enfoques tradicionales.

Manejo de la degeneración

El intercambio de Jordan presenta ventajas significativas en el tratamiento de la degeneración. Al considerar simultáneamente condiciones de factibilidad primal y dual, el proceso de pivoteo se realiza bajo criterios más restrictivos, lo que reduce la probabilidad de ciclos.

En particular, la estructura del método favorece la selección de pivotes que garantizan progreso en al menos uno de los espacios (primal o dual), lo cual disminuye el riesgo de estancamiento característico del simplex estándar en presencia de soluciones degeneradas.

Manejo de la dualidad

Una de las principales fortalezas del método de intercambio de Jordan es su capacidad para integrar explícitamente el problema primal y su dual en un mismo Tablero. Esto permite:

- Analizar simultáneamente condiciones de factibilidad y optimalidad en ambos problemas.
- Interpretar de manera directa las variables duales durante el proceso iterativo.
- Detectar de forma más eficiente la optimalidad global mediante condiciones complementarias.

En este sentido, el método no solo resuelve el problema primal, sino que también proporciona información estructurada del dual, lo que resulta especialmente útil en aplicaciones económicas y de optimización avanzada.

En resumen:

Desde un punto de vista estructural, el método simplex estándar y el método de la Gran M pueden entenderse como soluciones parciales al problema de la factibilidad inicial. El primero opera únicamente cuando dicha factibilidad es evidente, mientras que el segundo la introduce de manera artificial mediante penalizaciones externas al modelo.

En contraste, el enfoque basado en el Tablero de Tucker y el intercambio de Jordan aborda la factibilidad como un problema algebraico inherente, resolviéndolo mediante transformaciones matriciales que preservan la equivalencia del sistema. Esta característica le confiere mayor coherencia matemática, estabilidad numérica y una integración natural con la dualidad, justificando su adopción como eje conceptual del presente trabajo.

Conclusión

En conclusión, aunque los algoritmos de complejidad polinomial como el método del elipsoide de Leonid Khachiyan o el algoritmo de Narendra Karmarkar poseen relevancia teórica, en la práctica los métodos basados en simplex continúan siendo predominantes.

Dentro de estas variantes, el método de intercambio de Jordan destaca por su manejo estructurado de la fase I, su tratamiento más robusto de la degeneración y su integración explícita de la dualidad, lo que lo convierte en una alternativa conceptualmente más estructurada, aunque con mayor complejidad de implementación.

Capítulo V. Problema primal y método simplex.

El problema en programación lineal se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } z = c^T x \\ & \text{sujeto a } Ax \leq b \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

El problema se puede reescribir introduciendo variables básicas:

$$Ax + y = b, \quad y \geq 0$$

o, de manera equivalente:

$$y = b - Ax \geq 0$$

En esta formulación:

- x son las variables no básicas
- y son las variables básicas
-

Interpretación geométrica.

Si todos los $b_i > 0$, el punto:

$$x = (0,0)$$

Pertenece al espacio factible, el cual es un conjunto convexo no vacío.

Si existe algún $b_i < 0$, pueden ocurrir dos situaciones:

1. El origen no pertenece al espacio factible
2. El conjunto factible es vacío.

Fases del método simplex

- **Fase II:** el origen es factible
- **Fase I:** el origen no es factible o el sistema es inconsistente.

Ejemplos geométricos

Ejemplo 1: El origen pertenece al espacio factible. Observe gráfica 5.1.

Gráfica 5.1

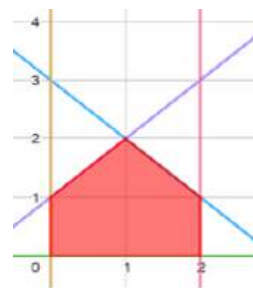
$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

$$\text{S. A. } x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



El origen pertenece al espacio convexo.

Ejemplo 2. El origen no pertenece al espacio convexo. Observe la gráfica 5.2

Gráfica 5.2

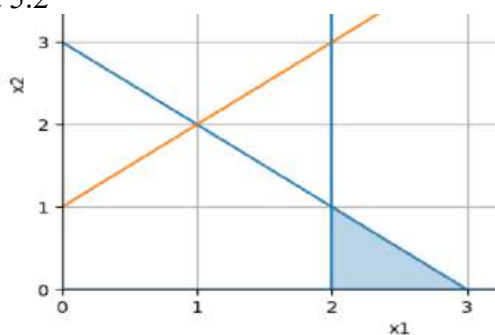
$$\text{Max. } z = x_1 + x_2$$

$$\text{S. A. } x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Ejemplo 3: Espacio factible vacío, En este caso se considera espacio vacío. Observe la gráfica 5.3

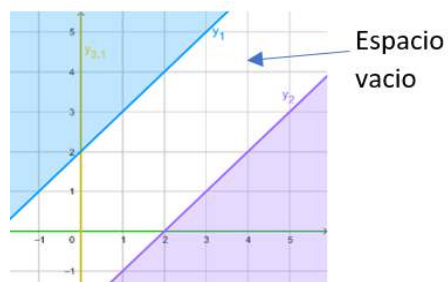
Gráfica 5.3

$$\text{Max. } z = x_1 + x_2$$

$$\text{S. A. } -x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Tablero de Tucker

El Tablero de Tucker inicial se estructura como:

Variables básicas	Variables no básicas $-x_i$	b
y_j	$x_{i,j}$	b_j
	Vector de costos $(-c_i)$	El valor de z

A lo largo de este texto, emplearemos el término *Tablero* como referencia directa al *Tablero* de Tucker, por ser la estructura matricial fundamental de nuestro análisis. Las transformaciones sobre esta matriz se realizan mediante cambios de base, operando bajo el algoritmo de intercambio de Jordan.

Criterio de optimalidad (fase II).

Se analiza el vector de costos C_j :

- Si existe alguna $C_j < 0$, la solución no es óptima
- Se selecciona la columna entrante (la C_j más negativa)

La fila saliente se determina mediante:

$$\lambda = \min \{ b_i / a_{i,s} \mid a_{i,s} > 0 \}$$

Caso 1 El origen pertenece al espacio factible cerrado

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.A. } -x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Forma estándar:

$$y_1 = 3 + x_1 - x_2 \geq 0$$

$$y_2 = 6 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$y_3 = 4 - x_1 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ bi } / a_{i,s}$$

Se muestran las iteraciones en los Tableros 5.1 al 5.4:

TABLERO 5.1

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	-1	1	3
y_2	1	1	6
y_3	1	0	4
Z	-3	-2	0

Primera iteración:

TABLERO 5.2

	$-x_1$	$-x_2$	B	$\lambda(-x_1)$	$\lambda(-x_2)$
y_1	-1	1	3	*	3/1
y_2	1	1	6	6/1	6/1
y_3	1	0	4	4/1	*
Z	-3	-2	0	*	*

$\lambda_{\min}$ ←

↑

- Variable que entra a la base: x_1
- Variable que sale de la base: y_3

TABLERO 5.3

	$-y_3$	$-x_2$	b	$\lambda(-x_2)$
y_1	1	1	7	7/1
y_2	-1	1	2	2/1
x_1	1	0	4	*
Z	3	-2	12	*

Resultado:

$$P_1 = (4,0), \quad z=3(4)+2(0)=12,$$

que corresponde al Tablero de Tucker 5.3.

Segunda iteración:

- Variable entrante: x_2
- Variable saliente: y_2

Tablero 5.4

	$-y_3$	$-y_2$	b
y_1	2	-1	5
x_2	-1	1	2
x_1	1	0	4
Z	1	2	16

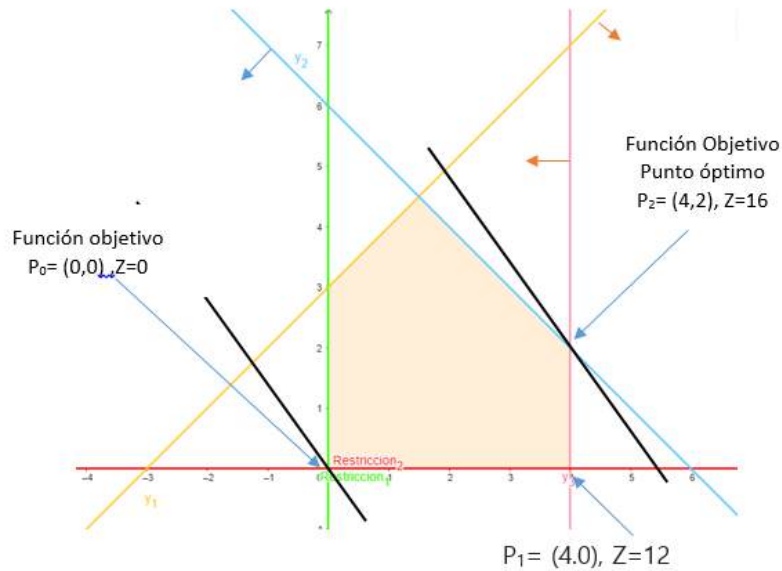
Resultado:

$$P_2 = (4,2), \quad z=3(4)+2(2)=16$$

que corresponde al Tablero de Tucker 5.4. El punto es óptimo ya que todos los valores del vector de costos son positivos.

La gráfica 5.4 representa al espacio convexo factible del caso 5.1, y los punto P_0 es el punto inicial, el punto P_1 muestra la primera iteración y el punto P_2 se muestra el punto óptimo.

GRÁFICA 5.4



Caso 2: El origen pertenece a la región factible cerrado

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= -3x_1 + 6x_2 \\
 \text{S.A. } -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\
 -3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\
 x_2 &\leq 6 \\
 3x_1 - x_2 &\leq 21 \\
 x_1 - x_2 &\leq 5 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Forma estándar

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 2x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\
 y_2 &= 3x_1 - 4x_2 + 12 \geq 0 \\
 y_3 &= -x_2 + 6 \geq 0 \\
 y_4 &= -3x_1 + x_2 + 21 \geq 0 \\
 y_5 &= -x_1 + x_2 + 5 \geq 0
 \end{aligned}$$

El Tablero inicial es el 5.5

Tablero 5.5

	$-x_1$	$-x_2$	b	$\lambda(-x_2)$
y_1	-2	1	2	2/1
y_2	-3	4	12	12/4
y_3	0	1	6	6/1
y_4	3	-1	21	*
y_5	1	-1	5	*
Z	3	-6	0	*

Primera iteración

- Variable entrante: x_2
- Variable saliente: y_1

Tablero resultante: Tablero 5.6

Tablero 5.6

	$-x_1$	$-y_1$		$\lambda(-x_1)$
x_2	-2	1	2	*
y_2	5	-4	4	4/5
y_3	2	-1	4	4/2
y_4	1	1	23	23/1
y_5	-1	1	7	*
Z	-9	6	12	*

Resultado:

$$P_1 = (0,2), \quad Z = -3(0) + 6(2)=12,$$

Siendo un elemento del vector de costos negativo, se tiene:

Segunda iteración:

- Variable entrante: x_1
- Variable saliente: y_2

Tablero resultante: Tablero 5.7

Tablero 5.7

	$-y_2$	$-y_1$	b	$\lambda(-y_1)$
x_2	2/5	-3/5	18/5	*
x_1	1/5	-4/5	4/5	*
y_3	-2/5	3/5	12/5	$(12/5)/(3/5)=4$
y_4	-1/5	9/5	111/5	$(111/5)/(9/5)12.3$
y_5	1/5	1/5	39/5	$(39/5)/(1/5)=39$
Z	9/5	-6/5	96/5	*

Resultado:

$$P_2 = \left(4/5, 18/5\right), \quad Z = -3(4/5) + 6(18/5) = 96/5.$$

Tercera iteración:

- Variable entrante: y_1
- Variable saliente: y_3

Tablero resultante: Tablero 5.8

Tablero 5.8

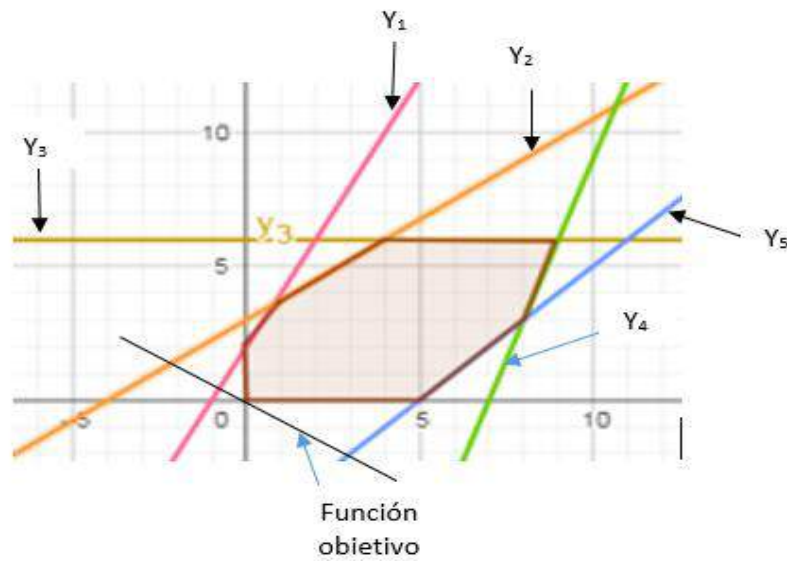
	$-y_2$	$-y_3$	b
x_2	0	1	6
x_1	-1/3	4/3	4
y_1	-2/3	5/3	4
y_4	1	-3	15
y_5	1/3	-1/3	7
Z	1	2	24

Resultado:

$$P_3 = (4, 6), \quad Z = -3(4) + 6(6) = 24,$$

El Tablero 5.8 es óptimo, ya que todos los valores de La hilera de costos son positivos. La gráfica 5.5 representa al espacio convexo factible del caso 5.2.

Gráfica 5.5.



Caso 3: El origen pertenece al espacio factible abierto

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= x_1 + x_2 \\
 \text{S.A. } -x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\
 -x_1 + x_2 &\leq 1 \\
 x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Se reescribe como:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= x_1 + x_2 \\
 \text{S.A. } y_1 &= x_1 - 2x_2 + 3 \geq 0 \\
 y_2 &= x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\
 y_3 &= -x_1 + 2x_2 + 2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Se observa que al tener las y_i positivas se tiene un espacio convexo. El primer Tablero es el 5.9.

TABLERO 5.9

	$-x_1$	$-x_2$	b	$\lambda(-x_1)$	$\lambda(-x_2)$
y_1	-1	2	3	*	$3/2$
y_2	-1	1	1	*	$1/1$
y_3	1	-2	2	$2/1$	*
Z	-1	-1	0	*	*

Primera iteración:

- Variable entrante: x_2
- Variable saliente: y_2

Tablero resultante: 5.10

TABLERO 5.10

	$-x_1$	$-y_2$	b	$\lambda(-x_1)$
y_1	1	-2	1	$1/1$
x_2	-1	1	1	*
y_3	-1	2	4	*
Z	-2	1	1	*

Resultado:

$$P_1 = (0,1) \quad Z=(0)+(1)=1,$$

Segunda iteración:

- Variable entrante: x_1
- Variable saliente: y_1

Tablero resultante: 5.11

TABLERO 5.11

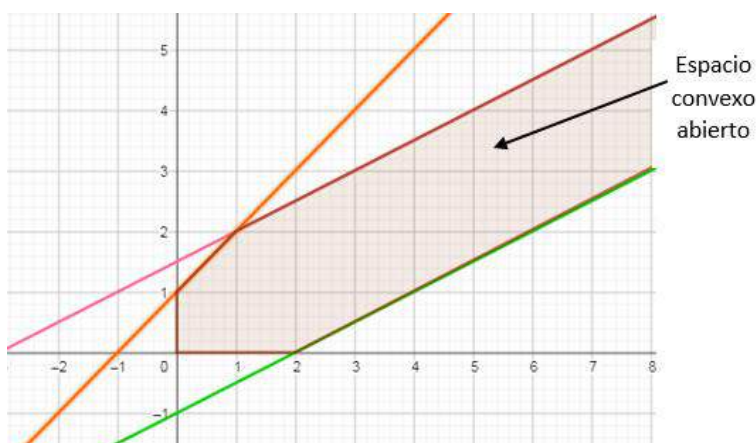
	$-y_1$	$-y_2$	B	$\lambda(-y_2)$
x_1	1	-2	1	*
x_2	1	-1	2	*
y_3	1	0	5	*
Z	2	-3	3	*

Resultado:

$$P_2 = (1,2) \quad Z=(1)+(2)=3$$

Se observa que uno de los valores la hilera de costos es negativo (-3), sin embargo, no se puede obtener un elemento para buscar un $\lambda_{\min}$. Si se observa la gráfica 5.6, el espacio obtenido es un espacio convexo abierto, lo que significa que el óptimo está en el infinito.

GRÁFICA 5.6



Óptimos alternos (o múltiples soluciones)

Ocurre cuando se ha llegado al Tablero óptima, pero se observa que el vector de costos reducidos (la fila de Z) de una o más variables no básicas es exactamente cero. Si se decide

forzar la entrada de esa variable no básica mediante un pivoteo (usando el criterio del cociente mínimo), el algoritmo calculará un nuevo Tablero. Las variables básicas cambiarán, indicando que nos hemos movido a otro **vértice extremo del politopo**, pero el valor de la función objetivo (Z) no cambiará en absoluto.

Geométricamente, en un espacio de n dimensiones, esto significa que el **hiperplano** que representa a la función objetivo es exactamente paralelo a una de las fronteras (hiperplanos de restricción) activas que delimitan el espacio convexo. Al desplazar la función objetivo para buscar el óptimo, esta no interseca al espacio factible en un único vértice, sino que se apoya sobre toda una **cara o faceta multidimensional** del politopo (la cual está formada por la combinación convexa de múltiples vértices óptimos). Todos los puntos contenidos dentro de esa región geométrica producen exactamente la misma ganancia máxima, generando una infinidad de soluciones óptimas.

Caso 4: Ejemplo de múltiples soluciones

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -3x_1 + 6x_2 \\ \text{S.A. } x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, al tratarse de un problema bidimensional que presenta múltiples soluciones, la función objetivo alcanza su valor óptimo en dos puntos extremos (vértices) adyacentes. De esta manera, cualquier coordenada sobre el segmento de recta que une a ambos vértices también es una solución óptima

Se observa que al tener toda y_i positiva, el origen pertenece al espacio convexo.

TABLERO 5.12

	$-x_1$	$-x_2$	b	$\lambda(-x_2)$
y_1	1	1	2	2/1
y_2	1	0	1	*
y_3	-1	2	2	2/2
Z	3	-6	0	*

Primera iteración

En el Tablero No 5.12, la hilera de costos se observa un valor negativo (-6), esto indica que no se ha llegado a un punto extremo óptimo. Por lo que se escoge $\lambda_{\min}$, en este caso, se hace un cambio de base $y_3 \leftrightarrow x_2$:

TABLERO 4.13

	$-x_1$	$-y_3$	b	$\lambda(-x_1)$
y_1	3/2	-1/2	1	<u>1/(3/2)</u>
y_2	1	0	1	1/1
x_2	-1/2	1/2	1	*
Z	0	3	6	*

Resultado

$$P_1=(0,1), \quad Z=-3(0)+6(1)=6,$$

El Tablero es óptimo y en la hilera de costos se tienen un cero. Esto nos puede indicar múltiples óptimos. Si se toma la columna donde el costo es cero como un cambio de base se obtiene un Tablero con el mismo valor de la función objetivo, pero con otro punto óptimo.

Segunda iteración

Del Tablero 5.13 se usa como pivote $a_{1,1}$, obteniéndose el Tablero 5.14.

TABLERO 5.14

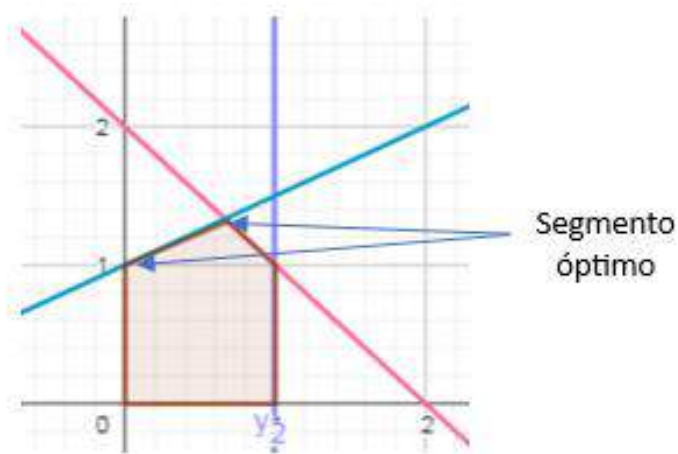
	$-y_1$	$-y_3$	b
x_1	$2/3$	$-1/3$	$2/3$
y_2	$-3/2$	$1/3$	$1/3$
x_2	$1/3$	$1/3$	$4/3$
Z	0	3	6

Resultado

$$P_2 = (2/3, 4/3), \quad Z = -3(2/3) + 6(4/3) = 6$$

En este caso, tanto el Tablero 5.13 como el Tablero 5.14 son óptimos, por lo que producen un segmento óptimo como se muestra en la gráfica 5.7.

GRÁFICA 5.7



Caso 5: Ejemplo de múltiples soluciones

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tablero 4.15

	$-x_1$	$-x_2$	b	$\lambda(-x_1)$	$\lambda(-x_2)$
y_1	1	1	2	2/1	2/1
y_2	0	1	1	*	1/1
y_3	1	-1	1	1/1	*
Z	-1	-1	0	*	*

Primera iteración.

En el *Tablero 5.15*, al analizar la fila de costos reducidos (fila de Z), se observa la presencia de valores negativos (en particular, -1), lo cual indica que la solución actual aún no es óptima. Por esta razón, se selecciona la variable entrante correspondiente a dicho coeficiente negativo. Aplicando el criterio del cociente mínimo (λ_{min}), se determina el pivoteo entre las variables y_3 y x_1 , obteniéndose el *Tablero 5.16*.

TABLERO 5.16

	$-y_3$	$-x_2$	b	$\lambda(-x_2)$
y_1	-1	2	1	1/2
y_2	0	1	1	1/1
x_1	1	-1	1	*
Z	1	-2	1	*

Resultado:

$$P_1=(1,0), \quad Z=(1)+(0)=1,$$

Segunda iteración:

Entra a la base x_2 .

Sale de la base y_1 .

Como resultado se obtiene el *Tablero 5.17*

TABLERO 5.17

	$-y_3$	$-y_1$	b	$\lambda(-y_3)$
x_2	-1/2	1/2	1/2	*
y_2	1/2	-1/2	1/2	1
x_1	1/2	1/2	3/2	3
Z	0	1	2	*

Resultado

$$P_2 = (3/2, 1/2), \quad Z = (3/2) + (1/2) = 2,$$

El punto es óptimo ya que todos los valores del vector de costos son positivos.

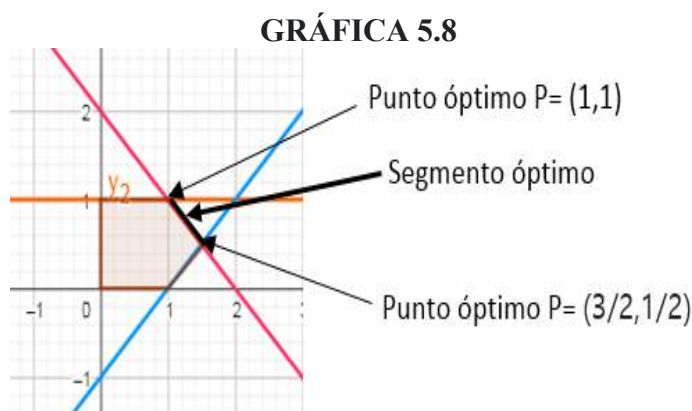
Como se vio anteriormente, el Tablero 5.17 representa la función objetivo con infinitud de soluciones. Usando la columna donde el vector de costos es cero, se como elemento pivote obteniéndose el Tablero 5.18.

TABLERO 5.18

	$-y_2$	$-y_1$	b
x_2	1	0	1
y_3	2	-1	1
x_1	-1	1	1
Z	0	1	2

Como se observa en el Tablero 5.18, el punto extremo en el espacio factible es $P_3 = (1, 1)$ y $Z = (1) + (1) = 2$.

La gráfica 5.8 representa al espacio convexo factible del caso 5.5. Observe que el segmento que une a los puntos $P=(1,1)$ y $P=(3/2,1/2)$, perteneciendo a los reales, por lo que tiene un infinito número de soluciones.



Degeneración

Un problema de programación lineal se denomina **degenerado** si alguna de sus soluciones básicas factibles contiene al menos una variable básica con valor cero.

La degeneración puede surgir durante la aplicación del método simplex cuando, al emplear la prueba del cociente mínimo para determinar la variable saliente (λ_{min}), se presentan múltiples razones mínimas iguales. En tal caso, el pivoteo conduce a una nueva base que representa la misma solución básica factible.

Desde una perspectiva geométrica, la degeneración ocurre cuando un vértice del conjunto factible está determinado por más de n restricciones activas, donde n es la dimensión del espacio de decisión. En consecuencia, distintas bases pueden corresponder a un mismo punto extremo.

Una implicación importante de la degeneración es que el valor de la función objetivo puede permanecer constante a lo largo de una o más iteraciones sucesivas del método simplex. En situaciones particulares, esto puede dar lugar al fenómeno de **ciclaje**, en el cual el algoritmo recorre repetidamente un conjunto finito de bases sin progreso en la función objetivo.

Caso 6: Ejemplo de degeneración

$$\text{Max. } Z=3x_1+2x_2$$

Sujeto a:

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

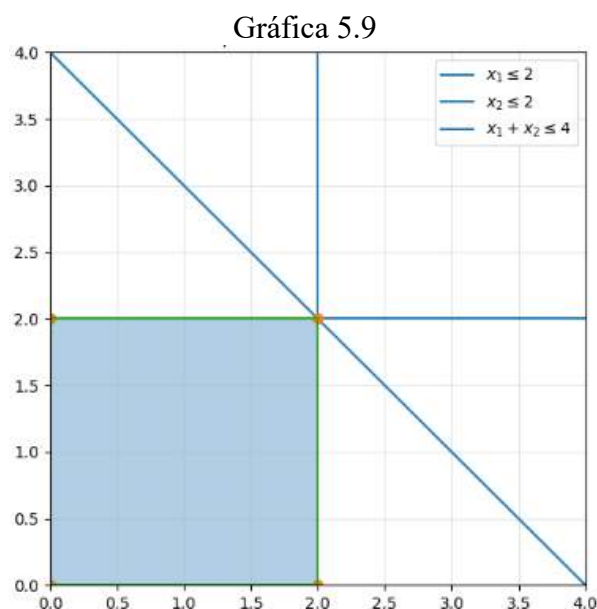
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El conjunto factible, que constituye un conjunto convexo, se muestra en la Gráfica 5.9. De su análisis se concluye que el valor óptimo de la función objetivo es $Z=10$, el cual se alcanza en el punto $P=(2,2)$.

En este punto se encuentran simultáneamente activas las tres restricciones, por lo que corresponde a la intersección de los tres segmentos. En términos de bases, esto implica que existen múltiples bases factibles que representan el mismo vértice, específicamente aquellas asociadas a las combinaciones (y_1, y_2) , (y_2, y_3) y (y_1, y_3) .

En consecuencia, el punto $P=(2,2)$ es una solución óptima **degenerada**, ya que en la solución básica asociada al menos una de las variables básicas toma el valor cero.



Se tiene el Tablero 5.19:

Tablero 5.19

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	1	0	2
y_2	0	1	2
y_3	1	1	4
Z	-3	-2	0

Primera iteración:

Del Tablero 5.20, calculando λ_{min} se realiza:

Sale de la base y_1

Entra a la base x_1

Tablero 5.20

	$-y_1$	$-x_2$	b
x_1	1	0	2
y_2	0	1	2
y_3	-1	1	2
Z	3	-2	6

Resultado:

$$P_1 = (2,0), \quad z = 3(2) + 2(0) = 6$$

Segunda iteración:

Del Tablero 5.20, calculando λ_{min} se realiza:

Sale de la base y_2

Entra a la base x_2

Tablero 5.21

	- y1	-x ₂	b
x ₁	1	0	2
y ₂	0	1	2
y ₃	-1	-1	0
Z	3	2	10

Resultado:

$$P_2 = (2,2), Z=3(2)+2(2)=10$$

Siendo el Tablero 4.25 óptimo y además muestra degeneración ya que una variable básica vale 0. El punto corresponde al indicado en la gráfica 4.9

Regla práctica

- **Degeneración:** al menos una **variable básica** tiene valor **cero**
- **No degeneración:** todas las variables básicas son **estrictamente positivas**

Eso indica que en el punto óptimo (2,2) hay **más restricciones activas de las necesarias**.

En 2 dimensiones, un vértice normalmente queda determinado por **2 restricciones activas**.

Pero en el punto (2,2) se activan **3**, por eso aparece degeneración.

La restricción redundante es:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

Ya que está implícita en:

$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

Así que esa tercera restricción **no reduce** la región factible. En este caso, geométricamente, el punto óptimo es único, pero algebraicamente pueden aparecer varias bases para ese mismo punto, porque la restricción redundante también se satisface con igualdad.

Desventajas de la degeneración

La degeneración en el método simplex puede afectar de manera significativa el desempeño y comportamiento del algoritmo. En particular, presenta las siguientes desventajas:

En primer lugar, puede provocar que, tras realizar un pivoteo, la solución básica factible permanezca inalterada. Esto implica que el valor de la función objetivo no experimente mejora alguna, generando iteraciones en las que no se avanza hacia una solución distinta.

En segundo lugar, la degeneración incrementa el número de iteraciones necesarias para alcanzar la solución óptima, ya que el algoritmo puede recorrer múltiples bases distintas que representan el mismo punto extremo del conjunto factible.

Adicionalmente, en presencia de degeneración, pueden ocurrir empates en la prueba del cociente mínimo, lo que introduce ambigüedad en la selección de la variable saliente y puede afectar la estabilidad del procedimiento.

En casos particulares, la degeneración puede conducir al fenómeno de **ciclaje**, en el cual el método simplex repite una secuencia finita de bases sin lograr progreso en el valor de la función objetivo.

Finalmente, la degeneración puede dificultar la interpretación geométrica del proceso iterativo, ya que distintos cambios de base no necesariamente corresponden a desplazamientos visibles en el espacio factible.

Frecuencia de la degeneración

La degeneración es un fenómeno relativamente común en problemas de programación lineal, especialmente en aquellos que contienen un número elevado de restricciones o presentan redundancia entre ellas.

En la práctica, la probabilidad de que ocurra degeneración aumenta cuando el conjunto factible posee vértices en los que se intersectan más restricciones activas de las estrictamente necesarias. Esto sucede con frecuencia en modelos reales, donde es habitual incluir restricciones redundantes o altamente correlacionadas.

No obstante, aunque la degeneración puede aparecer con cierta regularidad durante el desarrollo del método simplex, sus efectos adversos severos —como el ciclaje— son poco frecuentes en la práctica. La mayoría de las implementaciones modernas del algoritmo incorporan reglas de pivoteo diseñadas para evitar este tipo de comportamiento.

En consecuencia, la degeneración debe considerarse un fenómeno común desde el punto de vista teórico y computacional, pero generalmente manejable en aplicaciones prácticas.

FASE I

En la Fase II del método simplex se parte del supuesto de que se dispone de una solución básica factible inicial. En muchos casos, el origen puede representar una solución factible; sin embargo, cuando esto no ocurre, es necesario aplicar la **Fase I**, con el objetivo de construir una base factible inicial.

El origen no es factible cuando alguno de los términos independientes b_i del sistema $Ax \leq b$ es negativo. En tal situación, se construye un problema auxiliar en un espacio ampliado.

Para ello, se introduce una nueva columna p en el sistema. Esta columna se define de la siguiente manera: toma el valor de uno en aquellas filas donde el término independiente b_i es negativo, y cero en las demás.

Con esta construcción, se garantiza la existencia de una base inicial en el sistema ampliado.

En el espacio de variables (x, p) , se define una función objetivo auxiliar z'' , cuyos coeficientes son cero en todas las columnas, excepto en la columna p , donde toma el valor de uno.

El Tablero inicial representa una solución básica del sistema ampliado. A partir de este punto, se procede a aplicar intercambios de Jordan, es decir, operaciones de pivoteo, guiadas por la función objetivo auxiliar z' . El propósito de estas transformaciones es modificar sucesivamente la base con el fin de disminuir el valor asociado a la columna p .

Cada intercambio genera una nueva base equivalente del sistema, manteniendo la factibilidad del Tablero y preservando la equivalencia algebraica del sistema. El proceso continúa hasta que la variable p deja de pertenecer a la base y su valor asociado se reduce a cero, momento en el cual se ha obtenido una solución básica factible del sistema original.

Una vez optimizada la función auxiliar z' , deben verificarse las siguientes condiciones:

1. El valor óptimo de z' es igual a cero.
2. La columna p no pertenece a la base.
3. Todos los valores del lado derecho b_i son no negativos.

Si alguna de estas condiciones no se cumple, el sistema original es **infactible**, ya que no existe solución que satisfaga simultáneamente todas las ecuaciones.

Si las condiciones se satisfacen, se elimina del Tablero la columna p y la fila correspondiente a la función objetivo auxiliar z' . El Tablero resultante constituye una base factible del sistema original, a partir de la cual puede iniciarse la Fase II.

Desde el punto de vista algebraico, la Fase I puede interpretarse como un proceso de transformaciones sucesivas del sistema mediante intercambios de Jordan en un espacio ampliado, cuyo propósito es construir una base factible para el problema original.

Caso 7: El origen no pertenece a la región factible cerrada

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{S.A. } -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quedando el Tablero 5.22

TABLERO 5.22

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	-1	1	1
y_2	-1	-1	-1
y_3	1	1	2
Z	-2	-1	0

Como se observa en el *Tablero 5.22*, la variable b_2 tiene un valor negativo (-1), por lo que no es posible aplicar directamente la Fase II.

A diferencia del método de la Gran M, este enfoque no requiere un modelo extendido con múltiples variables artificiales penalizadas. Para estructurar el espacio ampliado, basta con introducir una única variable auxiliar paramétrica ρ mediante una nueva columna, a la cual se le asigna el valor de -1 en aquellas filas donde $b_i < 0$, y cero en el resto de las posiciones. Asimismo, se define una nueva función objetivo, colocando el valor de 1 en la columna ρ y cero en el resto de los elementos de la fila.

El resultado se muestra en el *Tablero 5.23*.

En general, la fila pivote se selecciona como aquella donde b_i tenga el valor más negativo, mientras que la columna pivote corresponde a la columna de la variable ρ .

TABLERO 5.23

	$-x_1$	$-x_2$	ρ	b
y_1	-1	1	0	1
y_2	-1	-1	-1	-1
y_3	1	1	0	2
Z	-2	-1	0	0
Z'	0	0	1	0

Primera iteración

Sale de la base ρ

Entra de la base y_2

Dando como resultado el Tablero el Tablero 5.24

TABLERO 5.24

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	b	$\lambda(-x_1)$	$\lambda(-x_2)$
y_1	-1	1	0	1	*	1
ρ	1	1	-1	1	1	1
y_3	1	1	0	2	2	2
Z	-2	-1	0	0	*	*
Z'	-1	-1	1	-1	*	*

Posteriormente, se aplica el criterio de la Fase II para maximizar en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$. Si al realizar la maximización la variable ρ resulta no básica y $z'=0$, entonces se ha obtenido una solución factible.

Segunda iteración:

Sale de la base x_1

Entra a la base ρ

TABLERO 5.25

	ρ	$-x_2$	$-y_2$	b
y_1	1	2	-1	2
x_1	1	1	-1	1
y_3	-1	0	1	1
Z	2	1	-2	2
Z'	1	0	0	0

El **Tablero 5.25** muestra que la variable ρ se encuentra como no básica y que $z'=0$; por lo tanto, en el espacio $\mathbb{R}^n$ se ha alcanzado una solución factible.

En consecuencia, se elimina la columna correspondiente a ρ y la fila asociada a z' , obteniéndose el **Tablero 5.26**.

TABLERO 5.26

	$-x_2$	$-y_2$	b	$\lambda(-y_2)$
y_1	2	-1	2	*
x_1	1	-1	1	*
y_3	0	1	1	1
Z	1	-2	2	*

En este momento ya se puede manejar el criterio de la fase II, por lo que:

Sale de la base y_3

Entra a la base y_2

TABLERO 5.27

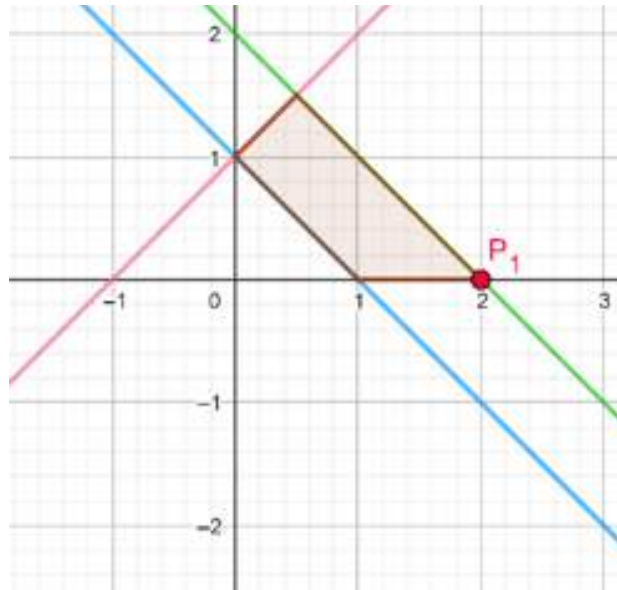
	$-x_2$	$-y_3$	b
y_1	2	1	3
x_1	1	1	2
y_2	0	1	1
Z	1	2	4

Resultado:

$$P_1=(2,0), Z=2(2)+0=4$$

El Tablero 5.27 es óptimo y la gráfica 5.10 muestra el poliedro localizado fuera del origen

GRÁFICA 5.10



Caso 8: Un ejemplo de espacio vacío (infactible).

Se presenta a continuación un modelo matemático sin solución. Para demostrar que se trata de un espacio vacío (infactible), como primer paso se requiere transitar por el espacio ampliado $\mathbb{R}^{n+1}$ mediante la aplicación de la Fase I. Al finalizar dicha fase, aunque la variable artificial ρ tomó el valor de cero (pasando a ser independiente), y $Z' = 0$, al eliminar a ρ y

Z' se observa que se tiene al menos un término independiente $b_i < 0$. Esto viola la condición de no negatividad, confirmando así la inexistencia de la región factible en el problema original.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + x_2 \\ \text{S.A. } x_1 - x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Como se observa en el **Tablero 5.28**, el origen no pertenece al conjunto convexo; por lo tanto, es necesario aplicar la Fase I.

De este modo, se construye el problema auxiliar, incorporando la variable ρ y la función objetivo z' , como se muestra en el **Tablero 5.29**.

Posteriormente, en el Tablero 5.30 y 5.31 se optimiza el problema en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.

TABLERO 5.28

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	-1	1	-1
y_2	1	-1	-1
Z	-1	-1	0

TABLERO 5.29

	$-x_1$	$-x_2$	ρ	b
y_1	-1	1	-1	-1
y_2	1	-1	-1	-1
Z	-1	-1	0	0
Z'	0	0	1	0

TABLERO 5.30

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	b	$\lambda(-x_1)$
ρ	1	-1	-1	1	1
y_2	2	-2	-1	0	*
Z	-1	-1	0	0	*
Z'	-1	1	1	-1	*

TABLERO 5.31

↓

	ρ	$-x_2$	$-y_1$	b
x_1	1	-1	-1	1
y_2	-2	0	1	-2
Z	1	-2	-1	1
Z'	1	0	0	0

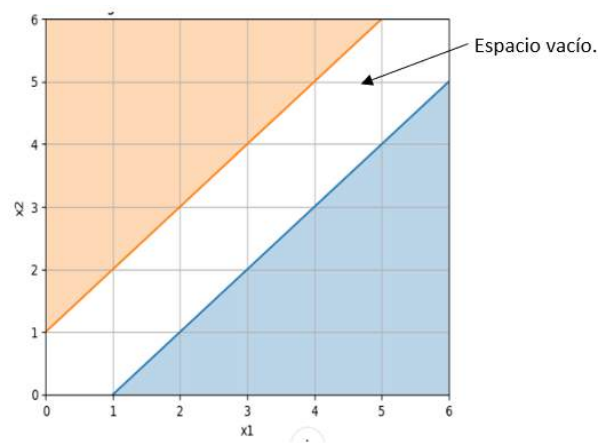
TABLERO 5.32

	$-x_2$	$-y_1$	b
x_1	-1	-1	1
y_2	0	1	-2
Z	-2	-1	1

En el **Tablero 5.32** se obtiene un punto correspondiente a una de las restricciones, $P=(1,0)$, en el espacio $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, este punto es **infactible**, ya que al menos un b_i presenta un valor negativo; por lo tanto, no es posible determinar un espacio convexo factible.

En la **gráfica 5.11** se muestra el conjunto factible vacío.

GRÁFICA 5.11



Caso 9: Ejemplo de espacio convexo abierto fuera del origen.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En el **Tablero 5.33** se observa que el origen no forma parte del conjunto convexo; por lo tanto, es necesario aplicar la Fase I.

En consecuencia, en el **Tablero 5.34** se introduce una dimensión adicional, junto con una nueva función objetivo auxiliar. En los Tableros 5.35 al 5.36 se optimiza $\mathbb{R}^{n+1}$.

TABLERO 5.33

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	-1	-1	-2
y_2	-1	-3	-2
y_3	0	1	1
Z	-2	-1	0

TABLERO 5.34

	$-x_1$	$-x_2$	ρ	b
y_1	-1	-1	-1	-2
y_2	-1	-3	-1	-2
y_3	0	1	0	1
Z	-2	-1	0	0
Z'	0	0	1	0

TABLERO 5.35

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	B	$\lambda(-x_1)$	$\lambda(-x_2)$
ρ	1	1	-1	2	2	2
y_2	0	-2	-1	0	*	*
y_3	0	1	0	1	*	1
Z	-2	-1	0	0	*	*
Z'	-1	-1	1	-2	*	*

TABLERO 5.36

	$-x_1$	$-y_3$	$-y_1$	b	$\lambda(-x_1)$
ρ	1	-1	-1	1	1
y_2	0	2	-1	2	*
x_2	0	1	0	1	*
Z	-2	1	0	1	*
Z'	-1	1	1	-1	*

TABLERO 5.37

↓

	ρ	$-y_3$	$-y_1$	b
x_1	1	-1	-1	1
y_2	0	2	-1	2
x_2	0	1	0	1
Z	2	-1	-2	3
Z'	1	0	0	0

TABLERO 5.38

	$-y_3$	$-y_1$	b	$\lambda(-y_3)$	$\lambda(-y_1)$
x_1	-1	-1	1	*	*
y_2	2	-1	2	1	*
x_2	1	0	1	1	*
Z	-1	-2	3	*	*

TABLERO 5.39

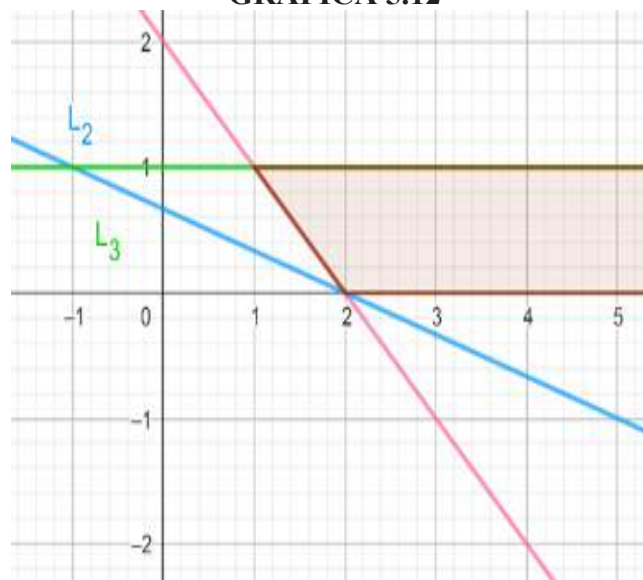
	$-y_2$	$-y_1$	b
x_1	$1/2$	$-3/2$	2
y_3	$1/2$	$-1/2$	1
x_2	$-1/2$	$1/2$	0
Z	$1/2$	$-5/2$	4

En los **Tableros 5.38 y 5.39** se intenta optimizar el problema en el espacio $\mathbb{R}^n$. En el **Tablero 5.39** aún se observa un valor negativo en el vector de la función de costos, lo que indica que existe una dirección de mejora. Sin embargo, no existe forma de realizar un nuevo pivoteo algebraico, ya que no hay elementos positivos en la columna de entrada para aplicar el criterio del cociente mínimo. Por lo tanto, se concluye que **el espacio de soluciones no está acotado** en esa dirección, permitiendo que la función objetivo crezca hacia el infinito sin alcanzar jamás un óptimo finito

En la **gráfica 5.12** se puede observar claramente que el conjunto factible es abierto.

$\therefore$ la solución es el “INFINITO”

GRÁFICA 5.12



Caso 10: Un punto forma el espacio convexo.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En el **Tablero 5.40** se observa que es necesario aplicar la Fase I.

Del **Tablero 5.41 al 5.44** se resuelve el problema en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.

Finalmente, el **Tablero 5.45 y 5.46** corresponden a la solución óptima en el espacio $\mathbb{R}^n$.

TABLERO 5.40

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	-1	-1	-2
y_2	1	-3	-2
y_3	0	1	1
Z	-2	-1	0

TABLERO 5.41

	$-x_1$	$-x_2$	ρ	b
y_1	-1	-1	-1	-2
y_2	1	-3	-1	-2
y_3	0	1	0	1
Z	-2	-1	0	0
Z'	0	0	1	0

TABLERO 5.42

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	b
ρ	1	1	-1	2
y_2	2	-2	-1	0
y_3	0	1	0	1
Z	-2	-1	0	0
Z'	-1	-1	1	-2

TABLERO 5.43

	$-y_2$	$-x_2$	$-y_1$	b	$\lambda(-y_2)$
ρ	-1/2	2	-1/2	2	1
x_1	1/2	-1	-1/2	0	*
y_3	0	1	0	1	1
Z	1	-3	-1	0	*
Z'	1/2	-2	1/2	-2	*

TABLERO 5.44

↓

	$-y_2$	ρ	$-y_1$	b
x_2	-1/4	1/2	-1/4	1
x_1	1/4	1/2	-3/4	1
y_3	1/4	-1/2	1/4	0
Z	1/4	3/2	-7/4	3
Z'	0	1	0	0

TABLERO 5.45

	$-y_2$	$-y_1$	b
x_2	$-1/4$	$-1/4$	1
x_1	$1/4$	$-3/4$	1
y_3	$1/4$	$1/4$	0
Z	$1/4$	$-7/4$	3

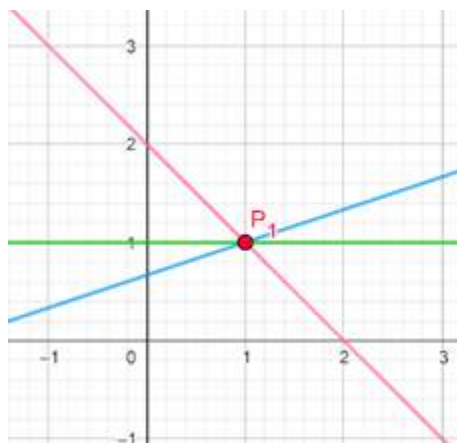
TABLERO 5.46

	$-y_2$	$-y_3$	b
x_2	0	1	1
x_1	1	3	1
y_1	1	4	0
Z	2	7	3

$$P_1 = (1, 1)$$

La gráfica 5.13 muestra el espacio convexo del caso 5.10.

GRÁFICA 5.13. Solo un punto es el espacio convexo



Capítulo VI. Dualidad

Todo problema de programación lineal está estrechamente relacionado con otro problema lineal asociado, denominado **problema dual**, mientras que el problema original recibe el nombre de **problema primal**. Esta relación no es accidental, sino que refleja una simetría estructural profunda entre ambos modelos.

El concepto de dualidad surge como resultado de un análisis más profundo de la programación lineal y fue identificado inicialmente por **John von Neumann** en el contexto de la teoría de juegos, previo al desarrollo formal del método simplex por **George B. Dantzig**. Desde entonces, la dualidad se ha consolidado como uno de los pilares teóricos y computacionales de la optimización lineal.

La dualidad no debe considerarse únicamente como una construcción matemática abstracta, sino como una herramienta que permite interpretar un mismo problema desde **dos perspectivas complementarias**. En particular, en el ámbito económico, el problema primal suele asociarse con la **asignación óptima de recursos**, mientras que el problema dual se relaciona con la **determinación de precios sombra o valores implícitos** de dichos recursos. Una propiedad fundamental de la dualidad establece que, si alguno de los dos problemas — primal o dual— posee una solución óptima, entonces el otro también la posee, y **ambos comparten el mismo valor óptimo**. Esta equivalencia constituye el núcleo de la teoría de dualidad y justifica el estudio conjunto de ambos modelos.

Importancia de la dualidad

La formulación dual presenta diversas ventajas teóricas, computacionales y prácticas, entre las cuales destacan:

- Cuando el número de restricciones es mayor que el número de variables, puede resultar más eficiente resolver el problema dual en lugar del primal.
- Permite realizar interpretaciones económicas directas, como el análisis de precios sombra y costos marginales.
- Facilita el análisis de sensibilidad de los parámetros del modelo.
- Permite resolver gráficamente ciertos problemas duales con dos restricciones, independientemente del número de variables del problema primal.

Estas propiedades convierten a la dualidad en una herramienta esencial tanto para el análisis teórico como para la resolución práctica de problemas de programación lineal.

Planteamiento de la dualidad

A todo problema de programación lineal (primal) puede asociársele un problema dual construido a partir de los **mismos datos**. Ambos problemas constituyen un **par dual**, ya que existe una correspondencia estructural directa entre sus elementos: cada restricción del problema primal se asocia con una variable del problema dual, y viceversa.

Esta relación presenta además una propiedad de simetría fundamental: al construir el dual del problema dual se recupera el problema original, es decir,

$$(\text{Dual})^{\text{Dual}} = \text{Primal}.$$

Esta característica, junto con la equivalencia de los valores óptimos y la relación entre las soluciones, permite afirmar que el problema primal y su dual representan **dos formulaciones equivalentes de un mismo modelo matemático**.

Asimismo, una propiedad esencial de la dualidad establece que la solución óptima de uno de los problemas proporciona información directa sobre la solución del otro. En consecuencia, **basta con resolver uno de ellos** para obtener el valor óptimo del problema correspondiente. Esta relación se formaliza mediante resultados fundamentales de la teoría de dualidad, entre los que destaca el **Teorema de Holguras Complementarias**, el cual establece condiciones necesarias y suficientes para la optimalidad simultánea del problema primal y su dual.

El Tablero óptimo refleja esta regla de manera automática:

las **variables básicas positivas** corresponden a **restricciones activas**, mientras que las **variables no básicas** permanecen en cero porque no aportan mejora a la función objetivo.

De esta forma, el Tablero organiza el equilibrio entre el problema primal y el dual, mostrando que solo las restricciones verdaderamente relevantes influyen en la solución óptima.

Este principio explica por qué el método simplex funciona y por qué el **Tablero de Tucker permite una lectura simultánea primal–dual**: el equilibrio que se observa en el Tablero óptimo es precisamente el que formaliza el Teorema de Holguras Complementarias.

Matemáticamente el primal y el dual quedan de la siguiente forma:

PRIMAL

$$\text{Max} \quad Z = c^T x$$

$$\text{S.A.} \quad Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Se puede reescribir en forma de holguras como:

$$y = b - Ax \geq 0$$

$$x \geq 0$$

DUAL

$$\text{Min} \quad W = b^T u$$

$$\text{S.A.} \quad A^T u \geq c$$

$$u \geq 0$$

Se puede expresar en términos de exceso como:

$$\text{S.A.} \quad V \geq A^T u - c \geq 0$$

$$u \geq 0$$

Un problema tiene solución si y solo si su sombra tiene solución y su optimo es el mismo.

Tablero de Tucker (representación general)

El Tablero inicial (Tablero 5.0) puede representarse de forma esquemática como:

TABLERO 5.0

	v_1		v_j		v_n	w
	$-x_1$		$-x_j$		$-x_n$	b
$u_1 \ y_1$						
$\vdots$						
$u_i \ y_i$			A			
$\vdots$						
$u_m \ y_m$						
$\lambda \ Z$	$-c_1$		$-c_j$		$-c_n$	0

Los tres posibles casos en la relación entre el problema primal y su problema dual son los siguientes:

a) Si el problema primal es factible y su función objetivo está acotada, entonces tanto el problema primal como el dual tienen solución óptima, y ambos comparten el mismo valor óptimo. Observar caso 6.1.

Caso 6.1. Problema primal con espacio convexo acotado y problema dual no acotado.

A continuación, se analiza un caso particular y fundamental de la teoría de dualidad. Se presenta un problema primal cuya región factible se encuentra completamente delimitada, formando un espacio convexo acotado (un politopo). Al formular su problema dual correspondiente, se observará que el espacio geométrico resultante es no acotado, extendiéndose hacia el infinito en al menos una dirección. El objetivo de este caso es demostrar que, a pesar de que el espacio dual es infinito, su dirección de optimización permite encontrar un vértice óptimo finito, garantizando que ambos problemas cumplan con el Teorema de Dualidad Fuerte y alcancen exactamente el mismo valor en su función objetivo.

***PRIMAL**

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{S.A.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

***DUAL**

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = 4u_1 + 2u_2 \\ \text{S.A.} \quad & u_1 - u_2 \geq 2 \\ & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En el Tablero 6.1 se observa tanto la parte primal como la parte dual.

TABLERO 6.1

	v_1 $-x_1$	v_2 $-x_2$	w b
$u_1 \ y_1$	1	1	4
$u_2 \ y_2$	-1	1	2
$\lambda \ Z$	-2	-1	0

Realizando operaciones en la parte primal se tiene:

Sale de la base y_1

Entra a la base x_1

Obteniéndose el Tablero 6.2, siendo éste óptimo.

TABLERO 6.2

	u_1 $-y_1$	v_2 $-x_2$	w b
$v_1 \ x_1$	1	1	4
$u_2 \ y_2$	1	2	6
$\lambda \ Z$	2	1	8

***PRIMAL**

$P=(4,0)$

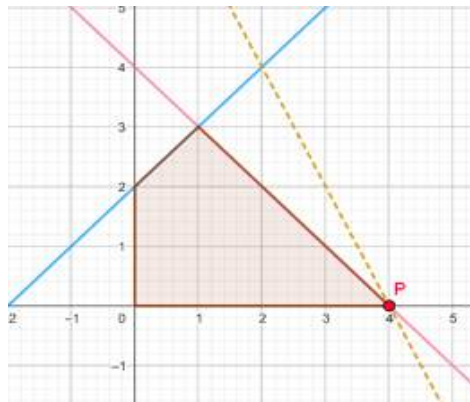
Max $Z = 2x_1 + x_2$

$Z = 2(4) + (0)$

$Z = 8$

La gráfica 6.1 muestra el espacio primal y el punto óptimo. La gráfica 6.2 muestra el espacio dual y su punto óptimo.

GRÁFICA 6.1 (PRIMAL)

**DUAL**

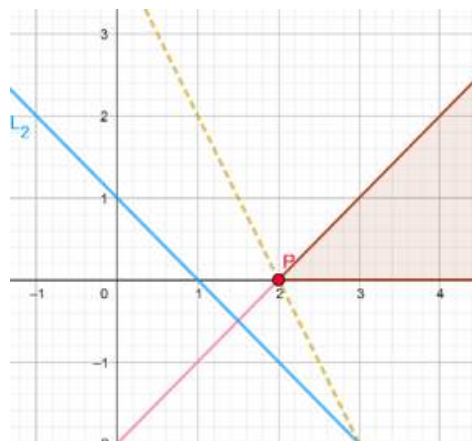
$$P=(2,0)$$

$$\text{Min } W = 4u_1 + 2u_2$$

$$W = 4(2) + 2(0)$$

$$W = 8$$

GRÁFICA 6.2 (DUAL)



b) Si el problema primal es no acotado, entonces el problema dual es infactible. Observar el caso 6.2

Caso 6.2. Problema donde el primal es no acotado y el dual es infactible

A continuación, se demuestra matemáticamente que la ausencia de límites en un problema primal garantiza la inexistencia de la región factible en su dual. A través de este ejemplo, se

verificará cómo un espacio original abierto hacia el infinito se traduce algebraicamente en un sistema dual contradictorio, cuyo espacio de soluciones está completamente vacío

***PRIMAL**

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{S.A. } -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

***DUAL**

$$\begin{aligned} \text{Min } W &= u_1 - 3u_2 \\ \text{S.A. } -u_1 - u_2 &\geq 3 \\ u_1 - u_2 &\geq 1 \\ u_1, u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El Tablero 6.3 es inicial. Resolviendo por primal se muestra que el origen no es parte del conjunto convexo.

TABLERO 6.3

	v_1	v_2	w
	$-x_1$	$-x_2$	b
$u_1 \ y_1$	-1	1	1
$u_2 \ y_2$	-1	-1	-3
$\lambda \ Z$	-3	-1	0

El Tablero 6.4 muestra el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.

TABLERO 6.4

	v_1 $-x_1$	v_2 $-x_2$	ρ	w b
$u_1 \ y_1$	-1	1	0	1
$u_2 \ y_2$	-1	-1	-1	-3
$\lambda \ Z$	-3	-1	0	0
Z'	0	0	1	0

Los Tableros 6.5 y 6.6 optimizan el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.

TABLERO 6.5

	v_1 $-x_1$	v_2 $-x_2$	$-u_2$ $-y_2$	w b
$u_1 \ y_1$	-1	1	0	1
ρ	1	1	-1	3
$\lambda \ Z$	-3	-1	0	0
Z'	-1	1	1	1

TABLERO 6.6

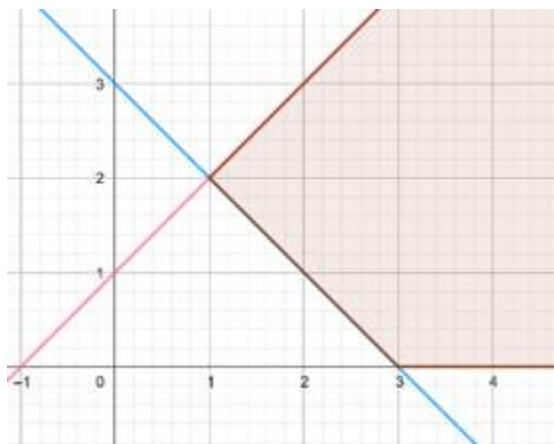
	ρ	v_2 $-x_2$	$-u_2$ $-y_2$	w b
$u_1 \ y_1$	1	2	-1	4
$-v_1 \ x_1$	1	1	-1	3
$\lambda \ Z$	3	2	-3	6
Z'	1	2	0	4

Como resultado, se concluye que el problema en el espacio $\mathbb{R}^n$ es **infactible**.

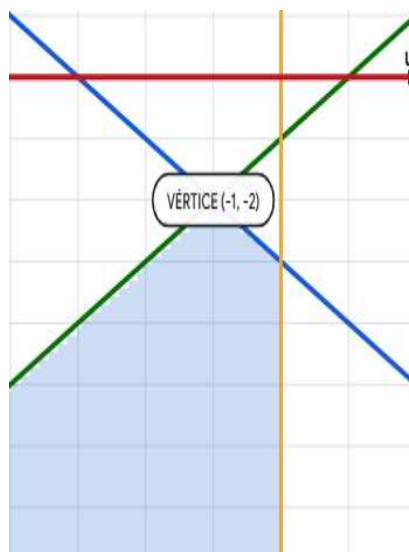
La **gráfica 6.3** muestra que el conjunto factible del problema primal es **no acotado**, por lo que la función objetivo puede crecer indefinidamente.

Por su parte, la **gráfica 6.4** representa el problema dual, en el cual las restricciones no generan un conjunto convexo en el primer cuadrante.

GRÁFICA 6.3 (PRIMAL)



GRÁFICA 6.4 (DUAL)



c) Si el problema primal es infactible, entonces el problema dual puede ser infactible o no acotado. Observe el caso 6.3 y el caso 6.4.

Caso 6.3. El problema primal es infactible y el dual es no acotado

A continuación, se analiza un problema primal cuyas restricciones generan una región infactible. Al trasladar este modelo a su forma dual, resulta fundamental observar el comportamiento de su función objetivo: dado que sus coeficientes de optimización son negativos, el objetivo matemático exige buscar el vértice con el valor mínimo posible dentro del espacio factible. No obstante, las restricciones del dual conforman una región no acotada. Al no existir un "piso" que detenga la optimización, la búsqueda de este valor mínimo se prolonga indefinidamente, derivando en una solución ilimitada.

*PRIMAL

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = x_1 - 3x_2 \\ \text{S.A.} \quad & x_1 - x_2 \leq -3 \\ & x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

*DUAL

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = -3u_1 - u_2 \\ \text{S.A.} \quad & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & -u_1 + u_2 \geq -3 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El **Tablero 6.7** presenta la formulación inicial del problema.

TABLERO 6.7

	v_1	v_2	w
	$-x_1$	$-x_2$	b
$u_1 \ y_1$	1	-1	-3
$u_2 \ y_2$	1	1	-1
$\lambda \ Z$	-1	3	0

Como el origen no pertenece al espacio convexo, se trabajará en la fase I, como se muestra en el Tablero 6.8

TABLERO 6.8

	v_1 $-x_1$	v_2 $-x_2$	ρ	w b
$u_1 \ y_1$	1	-1	-1	-3
$u_2 \ y_2$	1	1	-1	-1
$\lambda \ Z$	-1	3	0	0
Z'	0	0	1	0

Los **Tablerox 6.9 y 6.10** muestran las operaciones necesarias para la optimización del problema en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.

En el **Tablero 6.10** se observa que, aun cuando z' alcanza su valor óptimo (distinto de cero), la variable ρ permanece como variable básica; en consecuencia, el problema original no admite una solución factible.

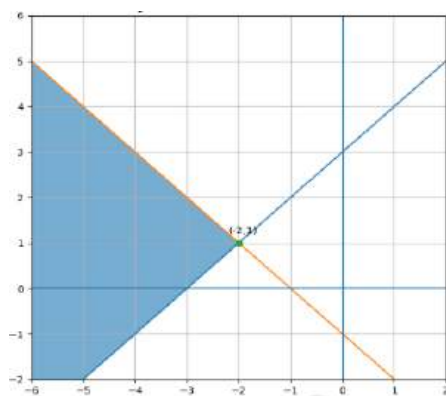
TABLERO 6.9

	v_1 $-x_1$	v_2 $-x_2$	$-u_1$ $-y_1$	w b
ρ	-1	1	-1	3
$u_2 \ y_2$	0	2	-1	2
$\lambda \ Z$	-1	3	0	0
Z'	1	-1	1	-3

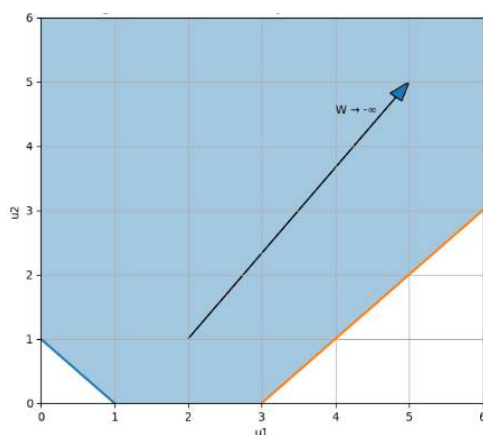
TABLERO 6.10

	v_1	$-u_2$	$-u_1$	w
	$-x_1$	$-y_2$	$-y_1$	b
ρ	-1	-1/2	-1/2	2
$-v_2 \ x_2$	0	1/2	-1/2	1
$\lambda \ Z$	-1	-3/2	3/2	-3
Z'	1	1/2	1/2	-2

GRÁFICA 6.5 (PRIMAL)



GRÁFICA 6.6 (DUAL)



En la Gráfica 6.5 se muestra una región convexa no acotada que se proyecta fuera del primer cuadrante. Por su parte, la Gráfica 6.6 exhibe un espacio geométrico de naturaleza similar, pero limitado al primer cuadrante. Para este último caso, dado que la función objetivo

$W = -3u_1 - u_2$ cuenta con coeficientes negativos, su valor decrece al aumentar las variables u_1 y u_2 . Como la región factible no presenta fronteras que detengan este avance, el valor de W puede hacerse arbitrariamente pequeño, concluyendo así que el problema no admite un mínimo finito.

Caso 6.4. Problemas primal y dual simultáneamente infactibles.

Para concluir el análisis de las anomalías en la teoría de dualidad, este caso de estudio presenta el escenario más extremo: aquel en el que tanto el modelo primal como su contraparte dual carecen de región factible. Este ejemplo es teóricamente fundamental porque rompe con la noción intuitiva de que la infactibilidad de un problema siempre garantiza que su dual sea no acotado. Aquí se demostrará que es matemáticamente posible que los sistemas de restricciones en ambos espacios sean mutuamente excluyentes, resultando en conjuntos convexos completamente vacíos en ambas formulaciones.

Desde un punto de vista intuitivo, esto indica que **el modelo está mal planteado desde su base**: no es posible asignar recursos de manera consistente ni tampoco asignarles precios que respeten todas las condiciones impuestas. Geométricamente, ambos problemas carecen de región factible; económicamente, no existe un equilibrio posible entre recursos y precios.

Este tipo de situación representa el caso más extremo de la dualidad, en el cual **ni el problema primal ni su dual admiten solución**, y explica por qué ningún método de optimización puede avanzar cuando las restricciones son mutuamente excluyentes.

*PRIMAL

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = x_1 + 3x_2 \\ \text{S.A.} \quad & x_1 - x_2 \leq -3 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

*DUAL

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = -3u_1 + u_2 \\ \text{S.A.} \quad & u_1 - u_2 \geq 1 \\ & -u_1 + u_2 \geq 3 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El **Tablero 6.11** presenta la formulación inicial del problema.

TABLERO 6.11

	v_1 $-x_1$	v_2 $-x_2$	w b
$u_1 \ y_1$	1	-1	-3
$u_2 \ y_2$	-1	1	1
$\lambda \ Z$	-1	-3	0

Como el origen no pertenece al espacio convexo, se trabajará en la fase I, como se muestra en el Tablero 6.12.

TABLERO 6.12

	v_1 $-x_1$	v_2 $-x_2$	ρ	w b
$u_1 \ y_1$	1	-1	-1	-3
$u_2 \ y_2$	-1	1	0	1
$\lambda \ Z$	-1	-3	0	0
Z'	0	0	1	0

Los **Tableros 6.13 y 6.14** muestran las operaciones necesarias para la optimización del problema en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.

En el **Tablero 6.14** se observa que, aun cuando z' alcanza su valor óptimo (distinto de cero), la variable ρ permanece como variable no básica; en consecuencia, el problema original no admite una solución factible.

TABLERO 6.13

	v_1	v_2	$-u_1$	w
	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	b
ρ	-1	1	-1	3
$u_2 \ y_2$	-1	1	0	1
$\lambda \ Z$	-1	-3	0	0
Z'	1	-1	1	-3

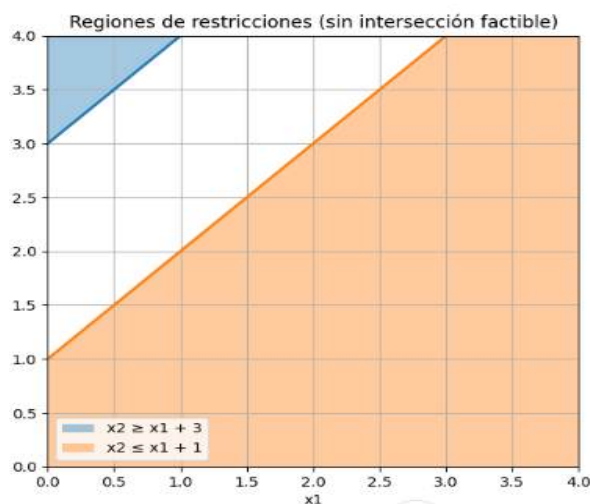
TABLERO 5.14

	v_1	$-u_2$	$-u_1$	w
	$-x_1$	$-y_2$	$-y_1$	b
ρ	0	-1	-1	2
$v_2 \ x_2$	-1	1	0	1
$\lambda \ Z$	-4	3	0	3
Z'	0	1	1	-2

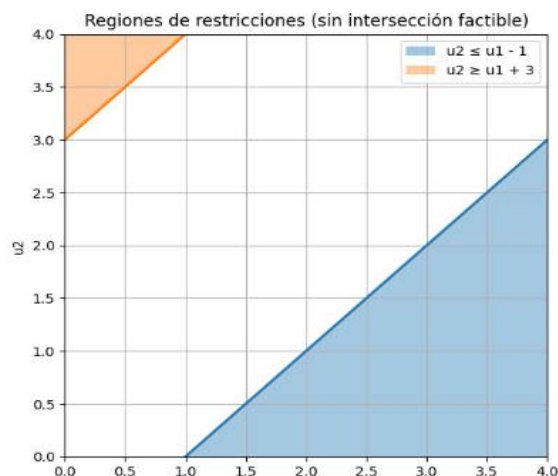
En conclusión, la lectura bidireccional del *Tablero* de Tucker demuestra algebraicamente la infactibilidad simultánea de ambos modelos. Por el lado del problema primal, el algoritmo de la Fase I se detiene al carecer de direcciones de mejora en la función objetivo artificial Z ; sin embargo, al quedar la variable ρ atrapada en la base con un valor positivo ($b=2$), se confirma la inexistencia de su región factible. De manera simétrica, la lectura vertical revela el colapso del problema dual: la presencia de un coeficiente negativo (-4) en la fila de la función objetivo principal, combinada con la ausencia total de elementos positivos en esa columna que permitan realizar un intercambio de Jordan válido, bloquea cualquier transición matemática hacia la factibilidad. En consecuencia, este estado de parálisis algorítmica confirma de forma definitiva que los sistemas de restricciones son inherentemente contradictorios, resultando en conjuntos convexos completamente vacíos tanto en el espacio original como en su proyección dual.

Tanto en la **gráfica 6.7** como en la gráfica 6.8 se muestra una región vacía.

Gráfica 6.7 (PRIMAL)



Gráfica 6.8 (DUAL)



FASE II en el método simplex dual

Tanto en el método primal como en el método dual se distinguen dos etapas: Fase I y Fase II. En general, cuando el método primal se encuentra en Fase II, el método dual se encuentra en Fase I, y viceversa.

En algunos casos, el espacio convexo asociado al problema primal no contiene al origen, por lo que es necesario aplicar la Fase I. Sin embargo, el espacio convexo correspondiente al problema dual sí contiene al origen. En esta situación, es posible aplicar el método simplex dual directamente en su Fase II.

Para ello, en la columna W se selecciona el término más negativo y, para elegir la variable pivote u_j , se utiliza el siguiente criterio:

$$\Lambda = \min \left\{ \frac{-q_j}{a_{rj}} \mid a_{rj} < 0 \right\}$$

Caso 6.5. Resolución de la Fase I primal mediante la Fase II dual

Este caso ilustra una situación en la que el problema primal se encuentra en Fase I, mientras que el problema dual se encuentra directamente en condiciones de Fase II. Esto permite restaurar la factibilidad primal mediante la optimización dual

*PRIMAL

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = -x_1 - x_2 \\ \text{S.A.} \quad & -3x_1 - 4x_2 \leq -5 \\ & -4x_1 - 2x_2 \leq -8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

*DUAL

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = -5u_1 - 8u_2 \\ \text{S.A.} \quad & -3u_1 - 4u_2 \geq -1 \\ & -4u_1 - 2u_2 \geq -1 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El **Tablero 6.15** muestra la formulación inicial del problema. Desde el punto de vista del espacio convexo asociado al problema primal, se observa que el origen no pertenece a dicho espacio, lo que indica que no se cuenta con una solución factible inicial y, en consecuencia, sería necesario aplicar la Fase I.

Sin embargo, desde el punto de vista del espacio convexo correspondiente al problema dual, el origen sí pertenece a la región factible, por lo que el problema puede resolverse directamente mediante el método simplex dual en su Fase II.

Tablero 6.15

	v_1	v_2	w
	$-x_1$	$-x_2$	b
$u_1 \ y_1$	-3	-4	-5
$u_2 \ y_2$	-4	-2	-8
Z	1	1	0
λ	1/4	1/2	0

El Tablero 6.16 presenta la solución del problema, tanto desde el punto de vista del espacio convexo asociado al problema primal como del espacio convexo correspondiente al problema dual.

Tablero 6.16

	$-u_2$	v_2	w
	$-y_2$	$-x_2$	b
$u_1 \ y_1$	-3/4	-5/2	1
$-v_1 \ x_1$	-1/4	1/2	2
Z	1/4	1/2	-2

La gráfica 6.9 ilustra el espacio convexo del problema primal, en tanto que la gráfica 6.10 muestra el correspondiente al problema dual.

***PRIMAL**

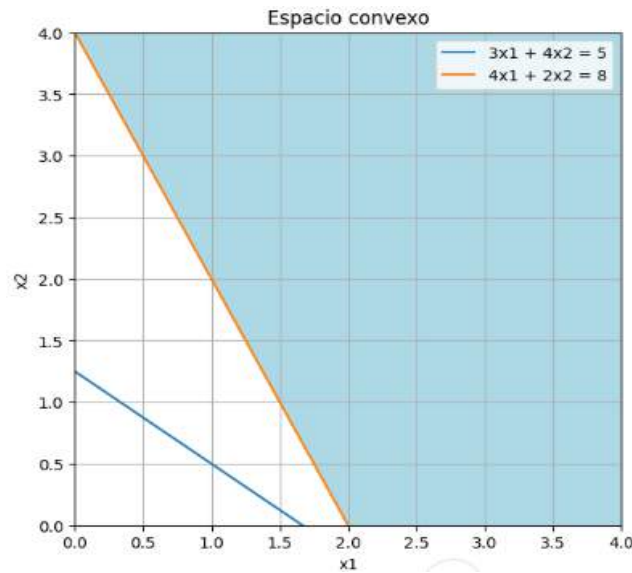
$$P=(2,0)$$

$$\text{Max } Z = -x_1 - x_2$$

$$Z = -(2) - (0)$$

$$Z = -2$$

Gráfica 6.9 (PRIMAL)



*DUAL

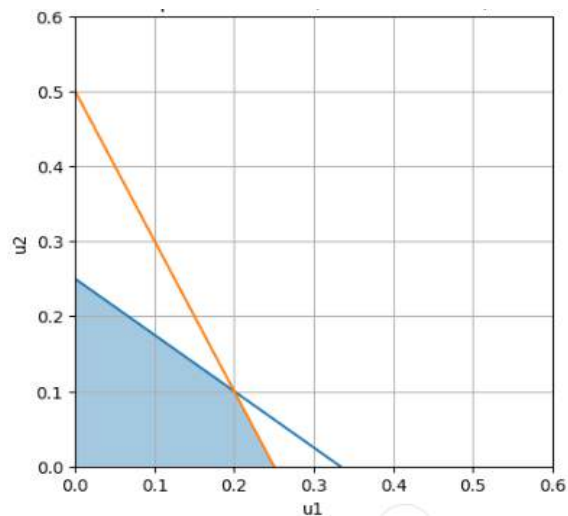
$$P=(0,1/4)$$

$$\text{Min } W = -5u_1 - 8u_2$$

$$W = -5(0) - 8(1/4)$$

$$W = -2$$

Gráfica 6.10 (DUAL)



A lo largo del capítulo se mostró que la dualidad no solo explica la coincidencia de los valores óptimos en los casos regulares, sino que también permite **clasificar de manera precisa los distintos comportamientos anómalos** que pueden presentarse en programación lineal: problemas no acotados, problemas infactibles y situaciones en las que tanto el primal como

el dual carecen de región factible. Estos casos extremos ponen de manifiesto que la dualidad actúa como un criterio diagnóstico del modelo, revelando inconsistencias estructurales cuando no existe un equilibrio posible entre restricciones y objetivos.

Capítulo VII. Análisis de sensibilidad.

El análisis de sensibilidad en el contexto del **método simplex** es una herramienta fundamental que permite evaluar cómo cambian las soluciones óptimas de un problema de programación lineal cuando se modifican ciertos parámetros, tales como los coeficientes de la función objetivo o de las restricciones.

El método simplex, además de proporcionar una solución óptima, ofrece información valiosa sobre la **estabilidad de dicha solución** frente a variaciones en los datos del problema.

El análisis de sensibilidad permite determinar:

- El rango de variación de los coeficientes de la función objetivo sin que se pierda la optimalidad de la solución.
- El impacto de los cambios en los coeficientes de las restricciones sobre la viabilidad y la optimalidad.
- La influencia de la modificación de los términos independientes sobre la región factible y la solución óptima.

Elementos que se analizan

Coeficientes de la función objetivo

El análisis determina cómo las variaciones en los coeficientes de la función objetivo afectan la solución óptima. Si dichos coeficientes cambian dentro de ciertos límites, la solución óptima permanece inalterada; en caso contrario, puede modificarse.

Coeficientes de las restricciones

Los coeficientes de las restricciones también influyen en la solución óptima. El análisis de sensibilidad permite evaluar cómo pequeñas variaciones en estos coeficientes pueden modificar el conjunto factible.

Términos independientes

Se analiza cómo los cambios en los términos independientes de las restricciones afectan la región factible y, en consecuencia, la solución óptima.

Métodos comunes de análisis de sensibilidad

- **Rango de optimalidad:** indica cuánto pueden variar los coeficientes de la función objetivo sin alterar la solución óptima.

- **Rango de viabilidad:** establece los límites dentro de los cuales pueden modificarse los términos independientes sin perder factibilidad.

Interpretación geométrica

Por la facilidad de su representación, el análisis se ilustra mediante gráficas en dos dimensiones. Desde un punto de vista geométrico, uno de los aspectos principales consiste en analizar la **distancia de las restricciones al origen**.

Sea la recta:

$$L_1: a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad b_i \geq 0,$$

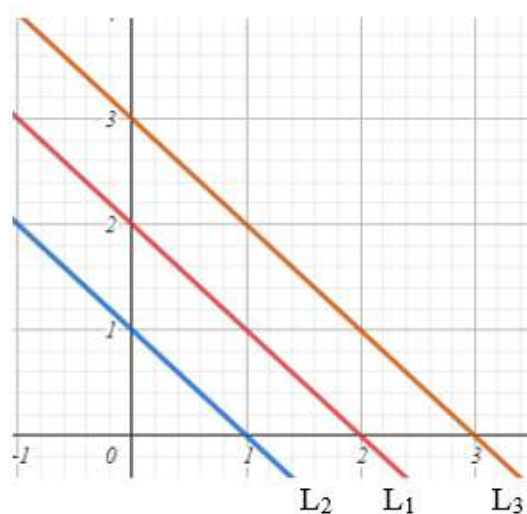
se pueden considerar variaciones del término independiente:

$$L_2: a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b'_i \quad b'_i < b_i,$$

$$L_3: a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b''_i \quad b''_i > b_i,$$

Estas variaciones desplazan la recta de manera paralela, sin modificar su pendiente. En consecuencia, el cambio en el término independiente no altera la orientación de la restricción, sino únicamente su posición relativa respecto al origen y, por tanto, la forma de la región factible. Ver gráfica 7.1.

Gráfica 7.1



Cambio de la pendiente

En el análisis de sensibilidad en dos dimensiones, el cambio en los coeficientes de las restricciones produce una modificación en la pendiente de las rectas que delimitan el espacio convexo.

En particular, un cambio en el coeficiente a_{i1} respecto a a_{i2} altera la pendiente de la recta de la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

- Si $a'_{i1} > a_{i1}$, entonces la pendiente de la recta decrece. En este caso, el punto de intersección con el eje x_1 , dado por $\frac{b_i}{a_{i1}}$, se acerca al origen, ya que:

$$\frac{b_i}{a'_{i1}} < \frac{b_i}{a_{i1}}$$

- Si $a''_{i1} < a_{i1}$, el efecto es contrario, es decir, el punto de intersección con el eje x_1 se aleja del origen:

$$\frac{b_i}{a_{i1}} < \frac{b_i}{a''_{i1}}$$

Ejemplo

Considérense las siguientes rectas:

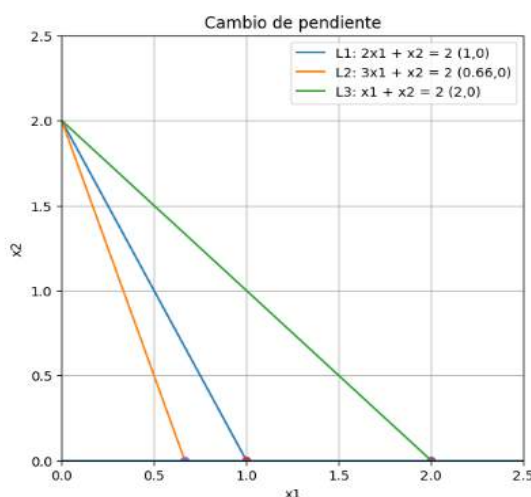
$$L_1: 2x_1 + x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{2} = 1 \quad m_1 = -1$$

$$L_2: 3x_1 + x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = 0.66 \quad m_2 = -3$$

$$L_3: x_1 + x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1} = 2 \quad m_3 = -1$$

En este caso, al aumentar el coeficiente de x_1 , la pendiente de la recta disminuye y el punto de intersección con el eje x_1 se acerca al origen. Por el contrario, al disminuir dicho coeficiente, la pendiente aumenta y el punto de corte se aleja del origen. Ver gráfica 7.2.

GRÁFICA 7.2.



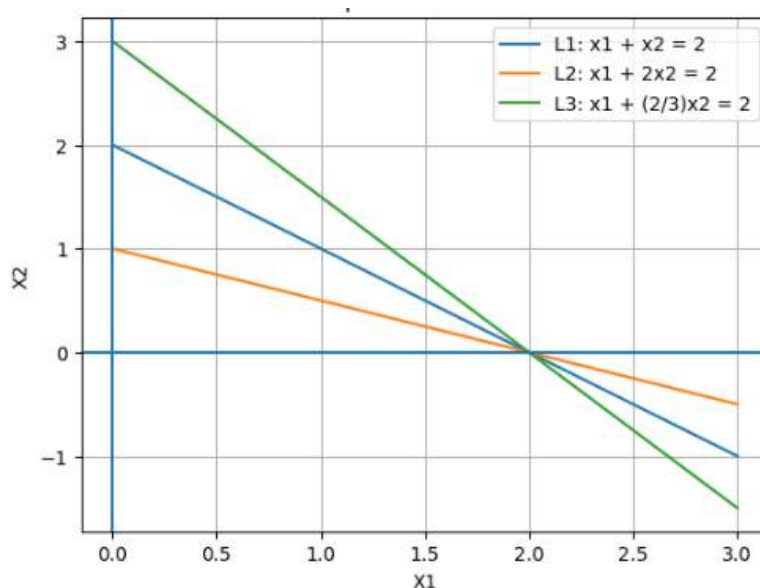
Cuando cambia el coeficiente a_{i2} , la recta $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ experimenta una **rotación** alrededor de su intersección con el eje x_1 (si b_i se mantiene constante) Ver gráfica 7.3..

- Si a_{i2} **aumenta**, la pendiente $m = \frac{a_{i1}}{a_{i2}}$ se hace **menos negativa** (disminuye en valor absoluto), por lo que la recta se vuelve **más horizontal**.
- Al mismo tiempo, la intersección con el eje x_2 , dada por $\frac{b_i}{a_{i2}}$, **disminuye**, acercándose al origen.
- Geométricamente, esto implica que la recta **gira hacia el eje x_1** .

Por el contrario:

- Si a_{i2} **disminuye**, la pendiente se vuelve **más inclinada** (más negativa en valor absoluto), y la intersección con el eje x_2 **aumenta**, alejándose del origen.
- En este caso, la recta **gira alejándose del eje x_1** .

Gráfica 7.3



Análisis de sensibilidad en variables no básicas

Rango de insignificancia

En este caso, el rango de insignificancia es el intervalo en el cual el coeficiente de una variable no básica puede variar sin que dicha variable se vuelva productiva o entre a la base.

Caso 7.1. Un ejemplo del análisis de sensibilidad en variables no básicas

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 10x_2$$

Sujeto a:

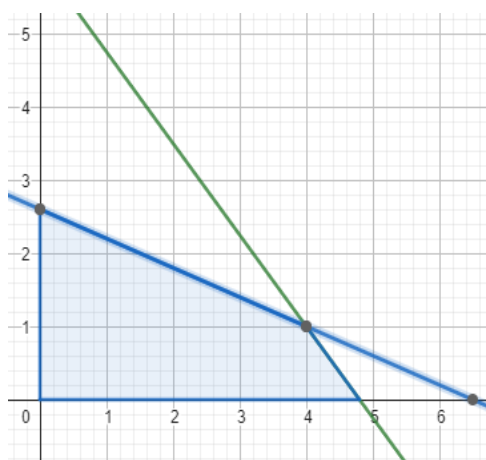
$$5x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El espacio convexo se muestra en la gráfica 7.4 y el Tablero 7.1 es el óptimo.

Gráfica 7.4



Tablero 7.1

	$-Y_1$	$-x_2$	b
x_1	1/5	4/5	24/5
y_2	-2/5	17/5	17/5
Z	4	6	96

Interpretación del óptimo

El óptimo se localiza en la intersección de la restricción y_1 con el eje x_1 , en el punto (4.8,0). Observando la función objetivo, el coeficiente C_2 no se encuentra en la base, ya que su contribución a la función objetivo es menor que la de C_1 . Por lo tanto, la variable x_2 es económicamente no productiva.

Si el valor de C_2 disminuye, la variable se vuelve aún menos atractiva. Por el contrario, si C_2 aumenta, la pendiente de la función objetivo cambia.

La pendiente de la función objetivo está dada por:

$$m = -\frac{C_1}{C_2}$$

Por lo tanto:

- Si C_2 disminuye, la pendiente se vuelve más negativa y la recta gira en sentido de las manecillas del reloj.
- Si C_2 aumenta, la pendiente se vuelve menos negativa y la recta gira en sentido contrario.

Caso crítico: múltiples soluciones óptimas

Si: $C_2=16$, la función objetivo:

$$20x_1+10x_2$$

tiene la misma pendiente que la restricción:

$$y_1: 5x_1+4x_2 \leq 24$$

En este caso, la función objetivo es paralela a la restricción activa, por lo que existen **múltiples soluciones óptimas**.

El conjunto de soluciones óptimas corresponde al segmento comprendido entre los puntos:

$$(4.8,0) \text{ y } (4,1).$$

Cambio en la base

Si: $C_2 > 16$, el punto óptimo se localiza en la intersección de las restricciones y_1 y y_2 , por lo que la variable x_2 entra a la base.

Si $C_2 \leq 16$, la base óptima permanece sin cambios. Por lo tanto, el rango de insignificancia es:

$$(-\infty, 16]$$

Extensión del análisis

Para una matriz de mayor dimensión, el efecto de modificar el coeficiente de una variable no básica puede analizarse mediante:

$$q'_k = z'_k - C'_k = q_k - \Delta, \text{ donde:}$$

- q_k es el costo reducido original,
- q'_k es el nuevo costo reducido,

- Δ es el cambio aplicado al coeficiente C_k , es decir, $\Delta = C'_k - C_k$.

En el ejemplo anterior, para que el punto óptimo extremo permanezca como óptimo al cambiar C_2 por C'_2 , se tiene que:

$$q_2 = 6$$

Por lo tanto, el rango de insignificancia está dado por:

$$(-\infty, C_2 + \Delta],$$

donde $\Delta = 6$. Así, el intervalo resulta: $(-\infty, 16]$.

Cuando $\Delta = 6$ (es decir, $C_2 = 16$), se obtiene: $q'_2 = q_2 - \Delta = 6 - 6 = 0$.

En este caso, el costo reducido se anula, lo que indica la presencia de **múltiples soluciones óptimas**, ya que la variable no básica puede entrar a la base sin mejorar el valor de la función objetivo.

Interpretación geométrica

El análisis de sensibilidad puede interpretarse geométricamente como un cambio en la pendiente de la función objetivo.

Al modificar C_2 :

- La recta de la función objetivo rota en el plano.
- Si se vuelve paralela a una restricción activa, aparecen múltiples soluciones óptimas.
- Si sobrepasa este punto, cambia la base óptima.

Nota sobre los Tableros

Si la función de costo cambia a:

Máx $Z = 20x_1 + 16x_2$, el Tablero a optimizar es el 7.2.

Tablero 7.2

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	5	4	24
y_2	2	5	13
Z	-20	-16	0

El Tablero 7.3 es óptimo y evidencia la existencia de múltiples soluciones óptimas, lo cual ocurre cuando al menos una variable no básica tiene costo reducido igual a cero

Tablero 7.3

	$-Y_1$	$-x_2$	b
X_1	1/5	4/5	24/5
y_2	-2/5	17/5	17/5
Z	4	0	96

Por lo tanto, el Tablero 7.4 corresponde a una solución óptima alterna, lo cual es consistente con la existencia de variables no básicas con costo reducido igual a cero.

Tablero 7.4

	$-Y_1$	$-Y_2$	b
X_1	25/85	-4/17	4
X_2	2/17	5/17	1
Z	4	0	96

Análisis de sensibilidad en variables no básicas.

Rango de insignificancia.

Para variables no básicas, El rango de insignificancia se define como el intervalo en el cual el coeficiente de una variable no básica puede modificarse sin que dicha variable se vuelva productiva, es decir, sin que entre a formar parte de la base óptima. Ver caso 7.2

Caso 7.2. Análisis de sensibilidad en variables no básicas.

Usando las mismas restricciones del caso 7.1 se observa que el óptimo se localiza $P = (4.8, 0)$. Observando la función objetivo, el coeficiente C_2 no se encuentra en la base, ya que su contribución es menor que la de C_1 . Por lo tanto, la variable x_2 es económicamente no productiva.

Si C_2 disminuye, la variable se vuelve aún menos atractiva. En este caso, la pendiente de la función objetivo se vuelve más negativa, lo que provoca un giro en el sentido de las

manecillas del reloj. Por el contrario, si C_2 aumenta, la pendiente se vuelve menos negativa, girando en sentido contrario.

Si $C_2 = 16$, la función objetivo:

$$20x_1 + 16x_2 = 96$$

tiene la misma pendiente que la restricción:

$$Y1: 5x_1 + 4x_2 \leq 24$$

En este caso, existen **múltiples soluciones óptimas**, correspondientes al segmento comprendido entre los puntos:

$$P_1 = (4.8, 0) \text{ y } P_2 = (4, 1).$$

Si $C_2 > 16$, el punto óptimo se ubica en la intersección de las restricciones y_1 y y_2 , por lo que la variable x_2 entra a la base.

Por lo tanto, C_2 no requiere un cambio de base en el intervalo:

$$(-\infty, 16].$$

Extensión a mayor dimensión

Para una matriz de mayor dimensión, el análisis puede realizarse mediante el costo reducido:

$$q'_k = Z_k - C'_k = q_k - \Delta,$$

Donde $\Delta = C'_k - C_k$

En el ejemplo anterior, para que el punto óptimo extremo permanezca como óptimo al modificar C_2 , se tiene que:

$$q_2 = 6$$

Por lo tanto, el rango de insignificancia es:

$$(-\infty, C_2 + \Delta)$$

Donde $\Delta = 6$. Así, el intervalo resulta:

$$(-\infty, 16]$$

Cuando $\Delta = 6$ (es decir, $C_2 = 16$), se cumple que:

$$q'_2 = q_2 - \Delta = 6 - 6 = 0$$

Esto indica la presencia de múltiples soluciones óptimas, ya que el costo reducido se anula.

De esta forma si la función de costo cambia a $\text{Máx } Z = 20x_1 + 16x_2$, se tiene el Tablero 7.5

Tablero 7.5

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	5	4	24
y_2	2	5	13
Z	-20	-16	0

El Tablero 7.6 es óptimo:

Tablero 7.6

	$-Y_1$	$-x_2$	b
X_1	$1/5$	$4/5$	$24/5$
y_2	$-2/5$	$17/5$	$17/5$
Z	4	0	96

Siendo el Tablero 7.7 otro Tablero óptimo alternativo (infinidad de soluciones):

Tablero 7.7

	$-Y_1$	$-Y_2$	b
X_1	$25/85$	$-4/17$	4
X_2	$2/17$	$5/17$	1
Z	4	0	96

El costo reducido $q_k = Z_k - C_k$ indica el cambio marginal en la función objetivo al introducir una variable no básica. El término Δ representa la variación aplicada al coeficiente de dicha variable en la función objetivo.

Análisis de sensibilidad para variables básicas.

El intervalo en el cual el coeficiente de una variable básica puede variar sin que ésta deje de ser productiva se denomina **rango de optimalidad**.

Caso 7.3. Análisis de sensibilidad para variables básicas.

Usando el mismo ejemplo 7.1, donde el Tablero 7.1 es óptimo, se determinará el rango de optimalidad para x_1 , es decir, el intervalo en el cual x_1 puede variar su coeficiente en la función objetivo manteniéndose como variable básica junto con y_2 .

La variable x_1 pertenece a la base debido a que su coeficiente en la función objetivo es $C_1 = 20$, lo que la hace económicamente productiva.

- Si C_1 aumenta, x_1 se vuelve más productiva.
- Si C_1 disminuye, su contribución a la función objetivo se reduce.

Cuando $C_1 = 12.5$, la función objetivo:

$$\text{Máx } Z = 12.5x_1 + 10x_2$$

tiene la misma pendiente que la restricción:

$$y_1: 5x_1 + 4x_2 \leq 24$$

En este caso, la función objetivo es paralela a la restricción activa, por lo que existen **múltiples soluciones óptimas**.

Para una mayor comprensión de lo que se está comentando se mostrarán dos casos:

Caso 1. $C_1 < 12.5$, donde $C_1 = 12$:

$$\text{Máx } Z = 12x_1 + 10x_2$$

S. A.

$$5x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

El Tablero 7.8 representa el caso 1 y el Tablero 7.9 representa el punto óptimo del caso 1.

Tablero 7.8

	$-Y_1$	$-x_2$	b
X_1	5	4	24
y_2	2	5	13
Z	-12	-10	0

Tablero 7.9

	$-Y_1$	$-Y_2$	b
X_1	25/85	-4/17	4
X_2	-2/17	5/17	1
Z	200/85	2/17	58

Donde existe un cambio de base y el punto óptimo es el punto $P = (4,1)$.

Caso 2. $C_1=12.5$, se espera infinidad de puntos óptimos.

El Tablero 7.10 representa el caso 2 y tanto el Tablero 7.11 como el Tablero 7.12. representan un punto óptimo, por lo que el segmento que los une es también óptimo.

Tablero 7.10

	$-Y_1$	$-x_2$	b
X_1	5	4	24
y_2	2	5	13
Z	-12.5	-10	0

Tablero 7.11

	$-Y_1$	$-x_2$	b
X_1	1/5	4/5	24/5
y_2	-2/5	17/5	17/5
Z	2.5	0	60

Tablero 7.12

	$-Y_1$	$-Y_2$	b
X_1	25/85	4/17	4
X_2	-2/17	5/17	1
Z	5/2	0	60

En el caso general se pueden realizar los siguientes cálculos. A partir del Tablero óptimo 7.1, se calcula $C_1 + \Delta$. El incremento se toma de los coeficientes que tiene la variable básica a estudiar en el Tablero óptimo. Observe el Tablero 7.13

Tablero 7.13

	$-Y_1$	$-x_2$	b
→ X_1	1/5	4/5	24/5
y_2	-2/5	17/5	17/5
Z	$4 + 1/5\Delta$	$6 + 4/5\Delta$	$96 + 24/5\Delta$

Cada restricción observada en el vector de costos debe de cumplir que deba ser mayor o igual a cero. Por lo que las restricciones son las siguientes:

$$4 + 1/5\Delta \geq 0 \quad \therefore \quad \Delta \geq -20$$

$$6 + 4/5\Delta \geq 0 \quad \therefore \quad \Delta \geq -7.5$$

Para que ambas condiciones se cumplan, $\Delta \geq -7.5$, por lo que $C_1 \geq 20 + (-7.5) = 12.5$. De esta forma, el rango de optimalidad es $(12.5, \infty)$.

Análisis de sensibilidad para el lado derecho de las restricciones (ldr)

El **precio sombra** mide el cambio que experimenta la función objetivo al incrementar en una unidad el valor del lado derecho de una restricción, es decir, al modificar b_i por $b_i + \Delta$.

Cuando esto ocurre, la frontera de la restricción se desplaza de forma paralela, lo que provoca un aumento o disminución de la región factible.

El intervalo en el cual puede variar b_i sin que la base óptima cambie se denomina **rango de factibilidad** de la restricción.

Caso 7.4. Ejemplo del rango de factibilidad

Interpretación geométrica

En el ejemplo 7.1, considerando la restricción:

$$y_1: 5x_1 + 4x_2 \leq 24$$

puede escribirse como:

$$y_1: 5x_1 + 4x_2 \leq b_1$$

Donde b_1 puede variar. Si b_1 aumenta, la recta se desplaza paralelamente hacia la derecha, ampliando la región factible.

Rango de factibilidad

Mientras $b_1 \leq 32.5$, el punto óptimo permanece en $P=(4.8,0)$, el cual corresponde a:

$$y_1 = 0 \text{ y } x_2 = 0.$$

Por lo tanto, la base óptima no cambia dentro de este intervalo.

Modificación del problema

Si b_1 cambia de 24 a 32.5, las restricciones quedan:

$$5x_1 + 4x_2 \leq 32.5$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 13$$

Interpretación del precio sombra

El precio sombra indica cuánto aumenta el valor óptimo de la función objetivo por cada unidad adicional en b_1 , siempre que el cambio se mantenga dentro del rango de factibilidad.

Donde el Tablero 7.14 representa el ejemplo modificado y el Tablero 7.15 representa el nuevo óptimo.

Tablero 7.14

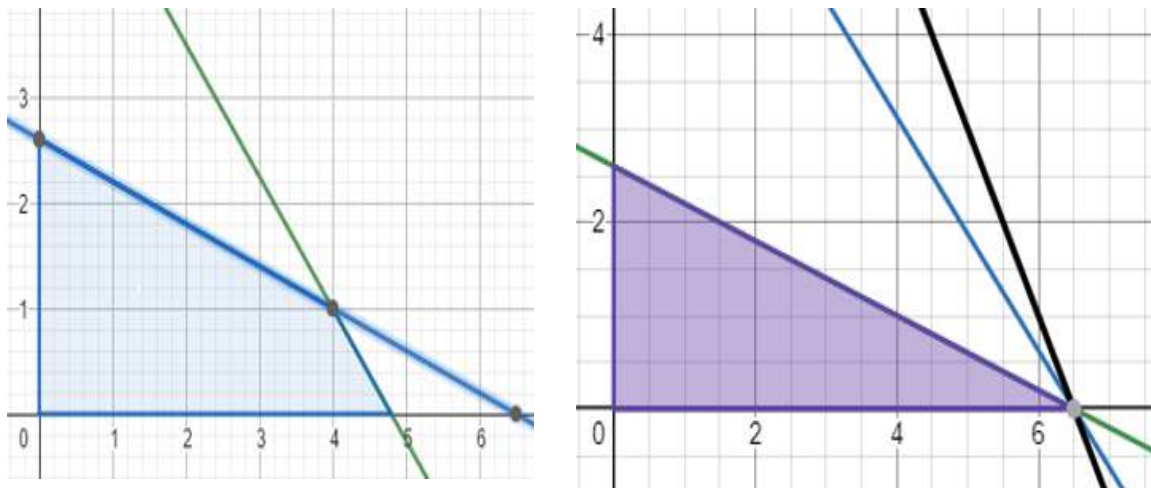
	$-X_1$	$-X_2$	b
Y_1	5	4	32.5
Y_2	2	5	13
Z	-20	-10	0

Tablero 7.15

	Y_2	$-X_2$	b
Y_1	$-5/2$	$-17/2$	0
X_2	$1/2$	$5/2$	$13/2$
Z	10	40	130

Del análisis geométrico se concluye que b_1 se localiza en el intervalo $[0, 65/2]$ donde se mantiene la misma base. En la gráfica 7.5, el segmento de color negro representa la función objetivo observándose que se localiza en el extremo del espacio convexo.

Gráfica 7.5



Para determinar el **rango de factibilidad** de cualquier restricción i , se debe garantizar que la nueva solución óptima, al modificar b_i por $b_i + \Delta$, continúe siendo un punto extremo factible.

En el Tablero óptimo del ejemplo, el **precio sombra** de la restricción y_1 es igual a 4. Esto significa que, por cada unidad que se incremente b_1 , el valor de la función objetivo aumenta en 4 unidades, siempre que dicho cambio se mantenga dentro del rango de factibilidad.

Al modificar b_i por $b_i + \Delta$, la función objetivo se ajusta en la misma proporción que el precio sombra. Es decir, el incremento en el valor óptimo es:

$$Z' = Z + (\text{precio sombra}) \cdot \Delta$$

Tomando como referencia el Tablero óptimo 6.1, se obtiene el siguiente incremento, como se muestra en el Tablero 7.16.

Tablero 7.16

	$-Y_1$	$-X_2$	b
X_1	1/5	4/5	$24/5 + 1/5\Delta$
Y_2	-2/5	17/5	$17/5 - 2/5\Delta$
Z	4	6	$96 + 4\Delta$

Para que el nuevo punto extremo sea factible se necesita cumplir:

$$24/5 + 1/5\Delta \geq 0 \quad \therefore \quad \Delta \geq -24$$

$$17/5 - 2/5\Delta \leq 0 \quad \therefore \quad \Delta \leq 8.5$$

Por lo que b_1 puede tener el rango de factibilidad de $[0, 32.5]$.

Cuando $b_1 = 0$, ($\Delta = -24$) se obtiene el Tablero 6.18, $P = (0, 0)$.

Tablero 7.17

	$-Y_1$	$-X_2$	b
X_1	1/5	4/5	0
Y_2	-2/5	17/5	13
Z	4	6	0

Cuando $b_1 = 32.5$, ($\Delta = 8.5$) se obtiene el Tablero 7.18, siendo el punto óptimo $P = (6.5, 0)$, obteniéndose una degeneración. Una base alterna se obtiene sacando de la base a y_2 e ingresando a la base a x_2 .

Tablero 7.18

	$-Y_1$	$-X_2$	b
X_1	1/5	4/5	6.5
Y_2	-2/5	17/5	0
Z	4	6	130

A lo largo del capítulo se mostró que el Tablero óptimo contiene información suficiente para analizar el impacto de modificaciones en los coeficientes del modelo, sin necesidad de resolver nuevamente el problema desde cero. En particular, los **costos reducidos** permiten determinar el rango de variación de los coeficientes de la función objetivo, mientras que los **precios sombra** y los rangos de factibilidad describen cómo los cambios en los términos independientes afectan la región factible y el valor óptimo.

Finalmente, este capítulo destaca que el análisis de sensibilidad transforma al método simplex en una **herramienta de apoyo a la toma de decisiones**, permitiendo identificar qué parámetros son críticos y cuáles pueden modificarse sin alterar la solución óptima. Este enfoque no solo amplía el valor práctico de la programación lineal, sino que prepara el terreno para el estudio de modelos más complejos, como la programación entera, donde las decisiones discretas y las variaciones de parámetros juegan un papel aún más relevante.

Capítulo VIII Programación entera (WOLSEY, 1998).

110

En la programación lineal se utiliza un modelo matemático para describir un problema de interés. El término “lineal” indica que todas las funciones del modelo deben ser funciones lineales, mientras que la palabra “programación” no se refiere a la programación de computadoras, sino que es sinónimo de “planeación”.

Por lo tanto, la programación lineal consiste en planificar actividades con el objetivo de obtener un resultado óptimo, es decir, aquel que cumple de la mejor manera posible con ciertos criterios, como minimizar costos o maximizar beneficios, entre todas las alternativas factibles.

Un problema de programación lineal supone el uso de variables continuas; sin embargo, en muchos problemas reales, las variables de decisión sólo tienen sentido si toman valores enteros. Un ejemplo de ello es la asignación de máquinas o vehículos a determinadas actividades.

En la práctica, un procedimiento incorrecto consiste en resolver un problema entero mediante el método simplex ignorando la restricción de integridad y, posteriormente, redondear la solución obtenida. Este enfoque puede conducir a dos situaciones:

- a) El valor entero obtenido es factible.
- b) El valor entero obtenido no es factible.

En el caso (a), no se tiene certeza de que la solución sea óptima. En el caso (b), es necesario ajustar los valores para cumplir las restricciones, pero sigue existiendo la duda sobre la optimalidad. Por ello, es fundamental contar con métodos adecuados para resolver problemas de programación lineal entera.

Aunque podría pensarse que los problemas enteros son más fáciles de resolver debido a que el número de soluciones factibles es finito, en la práctica este número puede ser extremadamente grande. Por ejemplo, en un problema binario con n variables, el número máximo de soluciones posibles es 2^n , lo que genera una alta complejidad computacional.

Como ilustración, si se dispone de una computadora capaz de realizar 10^{12} operaciones por segundo, un problema con 100 variables podría requerir hasta 1.2677^{30} operaciones, lo que implicaría un tiempo de resolución del orden de millones de siglos, volviéndolo prácticamente intratable.

110

Por esta razón, es necesario desarrollar estrategias que permitan descartar soluciones no prometedoras sin evaluarlas explícitamente. Con este objetivo se han propuesto diversos algoritmos; sin embargo, ninguno alcanza la eficiencia del método simplex en problemas continuos.

Muchos de estos algoritmos operan sobre regiones infactibles o presentan convergencia lenta, lo que dificulta la obtención del óptimo en un número razonable de iteraciones.

Método de ramificación y acotamiento

El método de ramificación y acotamiento no resuelve directamente el problema entero. En su lugar, considera una relajación continua del problema original, eliminando temporalmente la restricción de integridad.

De esta manera, el conjunto de soluciones enteras es un subconjunto del conjunto de soluciones continuas. La principal ventaja de este enfoque es que el espacio continuo es convexo, lo cual facilita su análisis.

Hasta la fecha, no existe un método directo eficiente para resolver problemas de programación entera. Por ello, se aprovechan los avances en programación lineal continua y se aplican técnicas adicionales.

Si la solución del problema relajado es entera, entonces también es óptima para el problema original. En caso contrario, se aplica el método de ramificación y acotamiento, el cual consta de dos procesos principales:

a) Ramificación

Consiste en dividir el espacio de soluciones en subespacios (subproblemas o nodos). El objetivo es eliminar regiones que no contienen soluciones enteras factibles o descartar soluciones no óptimas.

b) Acotamiento

Para un problema de maximización, cada subproblema genera una cota superior del valor de la función objetivo. Estas cotas permiten comparar soluciones y descartar subproblemas que no pueden mejorar la solución actual.

Cada subproblema se resuelve como un problema continuo. Si la solución obtenida es entera, no es necesario seguir ramificando. En caso contrario, se generan nuevas particiones.

Una solución entera es óptima si su valor es mayor o igual que las cotas superiores de todos los subproblemas restantes.

Si el proceso de ramificación y acotamiento se implementa eficientemente, es posible descartar grandes porciones del espacio de búsqueda sin evaluarlas explícitamente.

Algoritmo de Land y Doig

El primer algoritmo de ramificación y acotamiento fue desarrollado en 1960 por Land y Doig como una aplicación al problema de programación entera mixta.

El problema entero puede expresarse como:

$$\text{Max } Z = f(x)$$

sujeito a:

$$x \in T \text{ (restricciones lineales)}$$

$$x \in S \text{ (restricciones de integridad)}$$

donde:

- T es el conjunto de soluciones factibles del problema continuo,
- $S \subseteq T$ es el conjunto de soluciones factibles enteras.

Se denota por W el valor de la función objetivo al resolver el problema sobre el conjunto continuo T .

Idea general del algoritmo

El algoritmo comienza resolviendo la **relajación lineal** del problema (ignorando la restricción de integridad). El valor óptimo obtenido proporciona una **cota superior** para el problema entero.

Si la solución óptima no es entera, se procede a realizar una **ramificación**.

Proceso de ramificación

Se selecciona una variable x_k que tenga valor fraccional en la solución óptima del problema continuo.

Sea:

$$x_k = \bar{\bar{x}}_k,$$

Donde $\bar{\bar{x}}_k$ no es entero.

Se define:

$\lfloor \bar{x}_k \rfloor$ y $\lceil \bar{x}_k \rceil$

Entonces, se generan dos subproblemas:

$$x_k \leq \lfloor \bar{x}_k \rfloor$$

$$x_k \geq \lceil \bar{x}_k \rceil$$

Cada uno de estos subproblemas define un nuevo subconjunto del espacio factible.

Interpretación de las cotas

La función objetivo W , al evaluarse sobre estos subproblemas, proporciona cotas superiores para cada subconjunto.

- $W(\lfloor \bar{x}_k \rfloor)$ actúa como cota superior para los valores enteros menores o iguales.
- $W(\lceil \bar{x}_k \rceil)$ actúa como cota superior para los valores enteros mayores o iguales.

Esto justifica dividir el problema en dos ramas.

Representación mediante árbol

El proceso de ramificación puede representarse mediante un **árbol binario**:

- Cada nodo representa un problema de programación lineal.
- Cada rama representa una restricción adicional.

El nodo raíz corresponde al problema original relajado.

En cada iteración, se selecciona el nodo activo con **mayor cota superior**, ya que es el más prometedor.

Estrategia de selección

Si la solución de un nodo:

- Es entera $\rightarrow$ se obtiene una solución factible del problema entero.
- No es entera $\rightarrow$ se vuelve a ramificar.

Cuando existen varias variables fraccionales, se selecciona aquella con mayor parte fraccional.

Acotamiento

Si se encuentra una solución entera con valor Z^* , este valor se utiliza como **cota inferior**.

Entonces:

- Si un nodo tiene cota superior menor o igual que Z^* , se elimina.
- Esto reduce significativamente el número de subproblemas a analizar.

Descripción del algoritmo

1. Inicialización

Resolver la relajación lineal del problema.

- Si la solución es entera $\rightarrow$ es óptima y se termina.
- En otro caso, establecer la **cota inferior**:

$$\underline{Z} = -\infty$$

2. Selección del nodo

Elegir el nodo activo con **mayor cota superior** (más prometedor).

3. Ramificación

Seleccionar una variable entera con mayor valor fraccional y generar dos subproblemas.

4. Resolución

Resolver cada subproblema como problema de programación lineal.

Sea W_j el valor óptimo lineal del nodo.

5. Eliminación por infactibilidad

Si un nodo es infactible, se descarta.

6. Actualización de cotas

Para cada nodo resuelto:

- **Caso 1: Solución entera**

Si la solución del nodo es entera, entonces:

- Se obtiene un candidato a solución óptima $Z_j = W_j$
- Se compara con la cota inferior actual:

$$\text{Si } Z_j > \underline{Z} \Rightarrow \underline{Z} = Z_j,$$

$$\text{Si } Z_j \leq \underline{Z}, \text{ el nodo se descarta}$$

- **Caso 2: Solución no entera**

Si la solución no es entera:

- El nodo permanece activo
- Su valor W_j actúa como **cota superior**

7. Poda por acotamiento

Para cada nodo activo no entero:

Si $W_j \leq \underline{Z} \Rightarrow$ el nodo se elimina, de lo contrario se mantiene activo.

8. Terminación

Si no quedan nodos activos:

- Si $\underline{Z} = -\infty \rightarrow$ no existe solución factible
- Si $\underline{Z} > -\infty \rightarrow$ la solución asociada a $\underline{Z}$ es óptima

El algoritmo mantiene una cota inferior asociada a la mejor solución entera encontrada ($\underline{Z}$) y utiliza las cotas superiores de los nodos (W_j) para descartar aquellos que no pueden mejorar dicha solución, reduciendo así el espacio de búsqueda.

CASO 1.

Se considera el siguiente problema:

$$\text{Max. } Z = 4x_1 + 5x_2$$

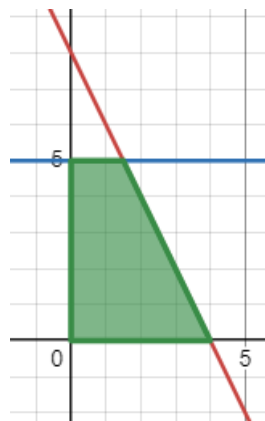
$$\text{S. A. } 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entero}$$

Iniciamos con $\underline{Z} = -\infty$. En la gráfica 8.1 se muestra el espacio convexo, en el Tablero 8.1 se muestra el problema original y en el Tablero 8.2 se muestra el punto óptimo.

Gráfica 8.1



Tablero 8.1

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	2	1	8
y_2	0	1	5
Z	-4	-5	0

Tablero 8.2

	$-y_1$	$-y_2$	b
x_1	1/2	-1/2	3/2
x_2	0	1	5
Z	2	3	31

Siendo $x_1=3/2$, $x_2=5$ y $W=31$

Como dicha solución no verifica las condiciones de integridad se elige la variable x_1 que no es entera y a partir de ella se generan dos restricciones $x_1 \leq 1$ y $x_2 \geq 2$, que añadidas cada una de ellas al problema original dan lugar a dos nuevos subproblemas que serían los siguientes:

$$\text{Max. } Z=4x_1+5x_2$$

$$\text{S. A. } 2x_1+x_2 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entero}$$

$$\text{Max. } Z=4x_1+5x_2$$

$$\text{S. A. } 2x_1+x_2 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 2$$

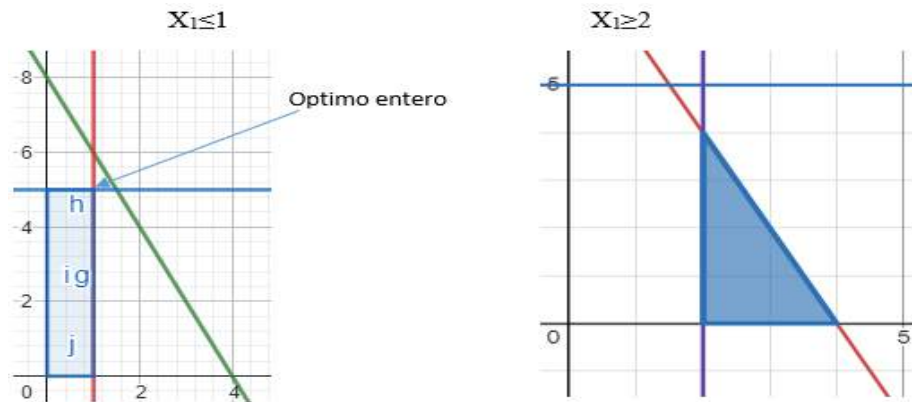
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entero}$$

El espacio convexo de cada uno de los problemas se observa en la gráfica 7.2 y los resultados para cada ramificación fueron:

$$x_1=1, x_2=5, Z=29$$

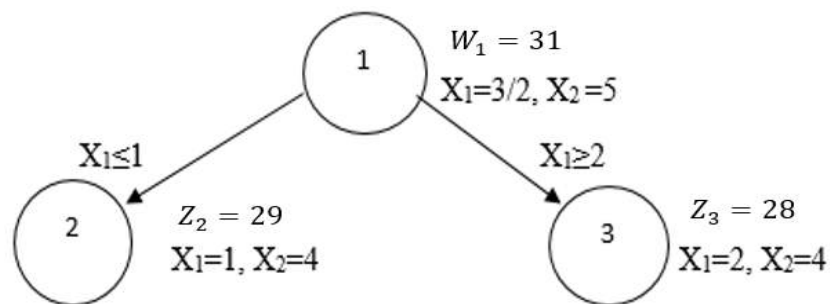
$$x_1=2, x_2=4, Z=28$$

Gráfica 7.2



Como se observa en el árbol binario de la gráfica 8.3, los nodos 2 y 3 corresponden a soluciones enteras. Al comparar sus valores con la cota inferior vigente, se toma el mayor de ellos, por lo que la cota inferior se actualiza a $\underline{Z}=29$, valor que representa el óptimo entero.

Gráfica 8.3



CASO 2.

$$\text{Max. } Z=8x_1+10x_2$$

$$\text{S. A. } 4x_1+6x_2 \leq 24$$

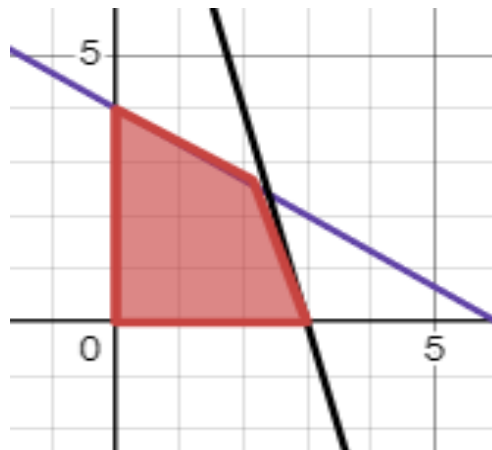
$$8x_1+3x_2 \leq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Iniciamos con $\underline{Z}=-\infty$. El espacio convexo se muestra en la gráfica 8.3

Gráfica 8.3



Siendo el Tablero 8.3 óptimo lineal

Tablero 8.3

	$-y_2$	$-y_1$	b
x_2	-0.11	0.22	2.66
x_1	0.16	-0.08	2
Z	0.22	1.55	42.66

Siendo x_2 un valor no entero, se procede a ramificar.

$$\text{Max. } Z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{S. A. } 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entero}$$

$$\text{Max. } Z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\text{S. A. } 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

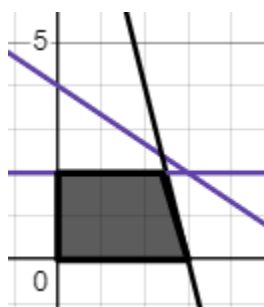
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entero}$$

En el Tablero 8.4 y la gráfica 8.4 se muestra el óptimo con la restricción adicional $x_2 \leq 2$

Gráfica 8.4

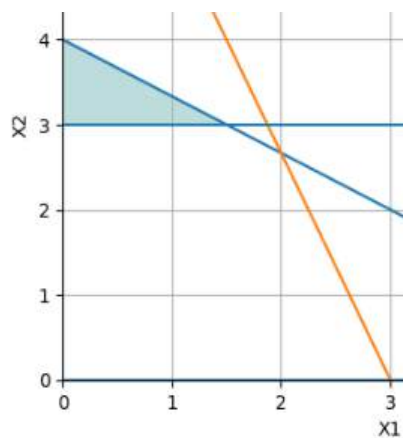


Tablero 8.4

	$-y_2$	$-y_3$	b
y_1	-0.5	-4.5	3.0
x_1	0.12	-0.37	2.25
x_2	0.0	1	2.0
Z	1.0	7	38

En el Tablero 8.5 y la gráfica 8.5 muestra el óptimo con la restricción adicional $x_2 \geq 3$.

Gráfica 8.5

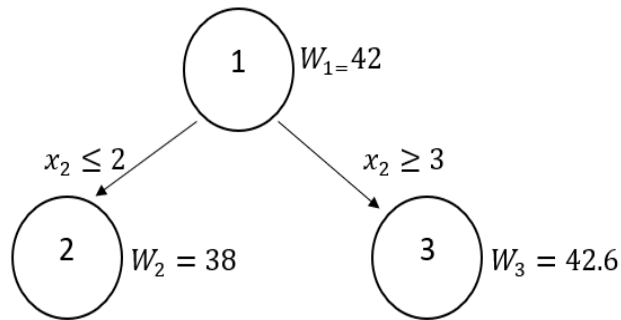


Tablero 8.5

	$-y_3$	$-y_1$	b
X_1	1.5	0.25	1.5
Y_2	-9	-2	3.0
X_2	-1	0	3.0
Z	2.0	2.0	42

El árbol binario se muestra en la gráfica 8.6.

Gráfica 8.6



Ninguna de las ramificaciones produce una solución entera, ya que en el nodo 2 se obtiene $x_1=2.25$ y en el nodo 3 se obtiene $x_1=1.5$, ambos valores fraccionales. Por lo tanto, la cota inferior $\underline{Z}$ permanece sin cambios.

Al comparar los valores de las funciones objetivo de ambos nodos, se observa que $W_3 > W_2$, por lo que el nodo 3 se considera más prometedor y se selecciona para continuar con el proceso de ramificación.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max. } Z=8X_1+10X_2 \\
 \text{S. A. } 4X_1+6X_2 \leq 24 \\
 8X_1+3X_2 \leq 24 \\
 X_2 \geq 3 \\
 X_1 \leq 1 \\
 X_1, X_2 \geq 0 \text{ y entero}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max. } Z=8X_1+10X_2 \\
 \text{S. A. } 4X_1+6X_2 \leq 24 \\
 8X_1+3X_2 \leq 24 \\
 X_2 \geq 3 \\
 X_1 \geq 2 \\
 X_1, X_2 \geq 0 \text{ y entero}
 \end{array}$$

Para $x_1 \leq 1$ se observa el Tablero optimo 8.6 donde se observa que $x_1=1$, $x_2=3.33$ y $W_4=41.33$

Tablero 8.6

	y3	y0	1	
y2	-0.66	0.16	0.33	
y1	-6.0	-0.5	6.0	
x2	-0.66	0.16	3.33	
x1	1.0	0.0	1.0	
z	1.33	1.66	0.001	41.33

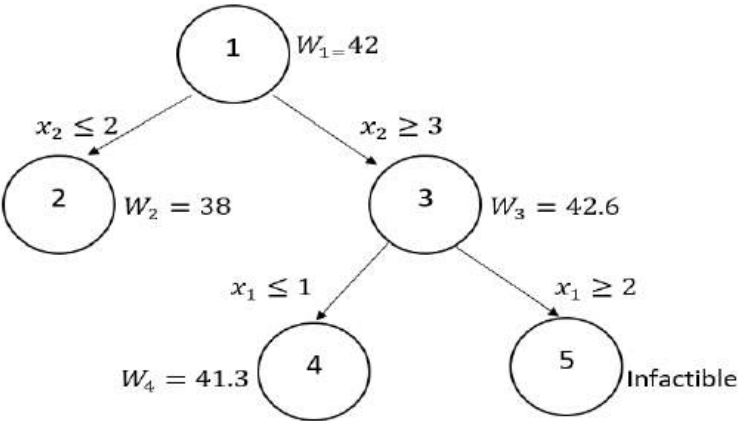
Al imponer la restricción $x_1 \geq 2$ y resolver el problema correspondiente, se obtiene el Tablero 8.7, en el cual se identifica que la región factible es vacía, es decir, el problema resulta infactible.

Tablero 8.7

	y0	y3	y2	1
x1	0.1	-0.6	0.6	1.8
y1	-1.1	3.6	-3.6	1.2
Ro	-0.1	-0.39	-0.6	0.2
x2	0.1	0.39	-0.39	2.8
z	1.8	-0.8	0.8	42.4
Z'	0.1	0.39	0.6	-0.2

En la gráfica 8.7 se muestra el árbol binario (el número de nodo se da con respecto al orden de aparición).

Gráfica 8.7



Hasta este momento no se tiene ningún nodo con todas las variables enteras, por lo que Z mantiene el mismo valor y $W_4 > W_2$, siendo el sufijo el número de nodo. Por lo que se realiza una ramificación en el nodo 4 con $x_2 \leq 3$ y $x_2 \geq 4$.

El Tablero 8.8 muestra las restricciones $x_2 \geq 3$, $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 3$. Siendo el Tablero 8.9 el óptimo entero. Su representación se localiza en el nodo 6 de la gráfica 8.8.

Tablero 8.8

	x1	x2	1
y0	4.0	6.0	24.0
y1	8.0	3.0	24.0
y2	0.0	-1.0	-3.0
y3	1.0	0.0	1.0
y4	0.0	1.0	3.0
z	-8.0	-10.0	0.0

Tablero 8.9

	y3	y4	1
y0	-4.0	-6.0	2.0
y1	-8.0	-3.0	7.0
x2	0.0	1.0	3.0
x1	1.0	0.0	1.0
y2	0.0	1.0	0.0
z	8.0	10.0	38.0

El Tablero 8.10 muestra las restricciones $X_2 \geq 3$, $X_1 \leq 1$, $X_2 \geq 4$. Como resultado de la búsqueda del óptimo se tiene el Tablero 8.11, siendo éste infactible. Su representación se localiza en el nodo 7 de la gráfica 8.8.

Tablero 8.10

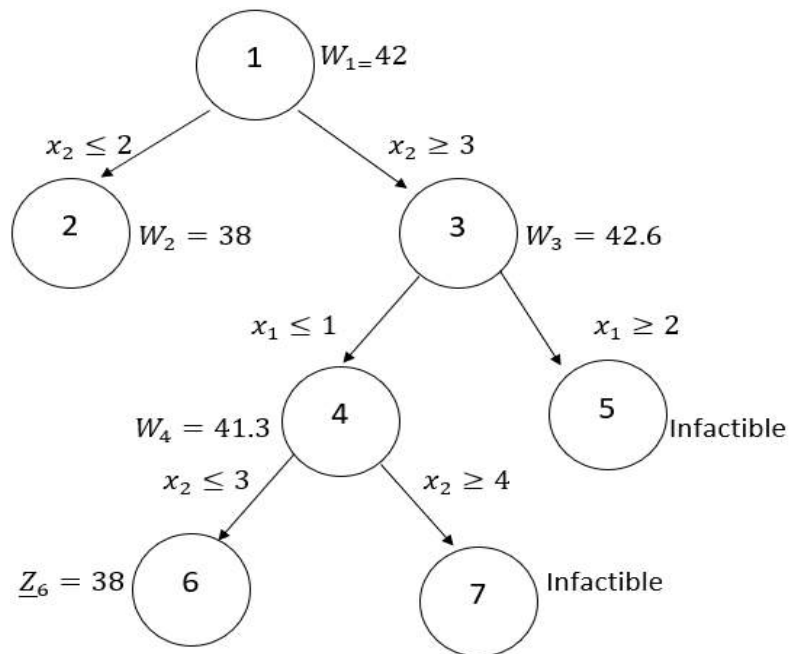
	x1	x2	1
y0	4.0	6.0	24.0
y1	8.0	3.0	24.0
y2	0.0	-1.0	-3.0
y3	1.0	0.0	1.0
y4	0.0	-1.0	-4.0
z	-8.0	-10.0	0.0

Tablero 8.11

	x1	y0	y4	1
x2	0.66	0.16	0.0	4.0
y1	6.0	-0.5	0.0	12.0
y2	0.0	0.0	-1.0	1.0
y3	1.0	0.0	0.0	1.0
Ro	-0.66	-0.16	-1.0	0.0
z	-1.33	1.66	0.0	0.0
Z'	0.66	0.16	1.0	0.0

Gráfica 8.8

123



Al obtener en el nodo 6 la primera solución entera, se actualiza la cota inferior a $\underline{Z}=38$. El único nodo pendiente de exploración es el nodo 2; sin embargo, dado que su cota superior cumple $W_2=Z$, no es posible obtener una solución mejor a partir de él. Por lo tanto, se descarta y se concluye que el nodo 6 proporciona la solución óptima entera.

En este capítulo se abordó la **programación entera** como una extensión natural de la programación lineal, motivada por la necesidad de modelar problemas reales en los que las variables de decisión deben tomar valores discretos. A diferencia de los modelos continuos, la restricción de integridad rompe la convexidad del espacio factible y elimina muchas de las propiedades estructurales que garantizan la eficiencia del método simplex.

El **método de Ramificación y Acotamiento** se presentó como una estrategia sistemática para enfrentar esta complejidad, utilizando la programación lineal continua —y en particular el método simplex— como subrutina fundamental. A través de la exploración controlada del espacio de soluciones y del uso de cotas, este método permite descartar regiones que no contienen soluciones enteras óptimas sin necesidad de examinarlas exhaustivamente.

123

Finalmente, la programación entera evidencia los límites de los métodos continuos y subraya la importancia de combinar enfoques algebraicos, geométricos y algorítmicos para la resolución de problemas de optimización más realistas. Con ello, el capítulo cierra el recorrido iniciado desde el álgebra lineal y el intercambio de Jordan, mostrando cómo estos fundamentos se proyectan hacia modelos más complejos y cercanos a las aplicaciones reales.

Conclusión

El uso del Tablero de Tucker en programación lineal ofrece varias ventajas importantes que justifican su adopción en la resolución de problemas de optimización. Aquí se destacan algunas de las razones más importantes:

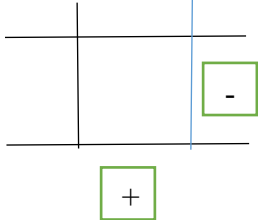
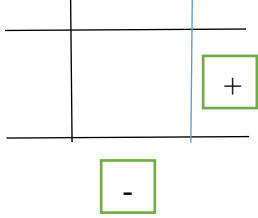
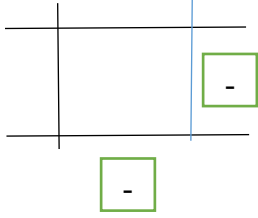
1. **Eficiencia en el Manejo de Restricciones y Variables:** El Tablero de Tucker proporciona una forma sistemática y estructurada de manejar tanto las restricciones como las variables. Esto facilita la organización de la información y la ejecución de los pasos necesarios para llegar a la solución óptima.
2. **Simplificación del Proceso de Cálculo:** Este método permite una simplificación en el proceso de cálculo, ya que reduce la complejidad de las operaciones aritméticas involucradas. Esto es especialmente útil cuando se trabaja con problemas de gran escala.
3. **Claridad en la Interpretación de Resultados:** El Tablero de Tucker facilita la interpretación de los resultados al presentar la información de manera clara y ordenada. Esto es crucial para la toma de decisiones y para la comprensión de cómo se llegó a la solución óptima.
4. **Versatilidad y Adaptabilidad:** Este enfoque es versátil y puede adaptarse a una amplia variedad de problemas de programación lineal, desde los más simples hasta los más complejos. Su flexibilidad permite que sea utilizado en diversos contextos y aplicaciones.
5. **Base para Otros Métodos:** El Tablero de Tucker sirve como base para otros métodos y algoritmos en programación lineal, como el método de las dos fases y el método simplex revisado. Esto lo convierte en una herramienta fundamental para quienes deseen profundizar en el estudio y aplicación de técnicas de optimización.

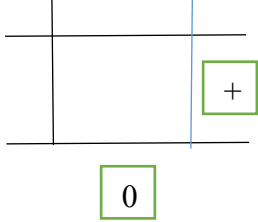
El Tablero de Tucker es realmente una versión resumida del Tablero Estándar que tiene la ventaja de utilizar en su definición el concepto de variables dependientes e independientes que facilitan la comprensión del Método Simplex.

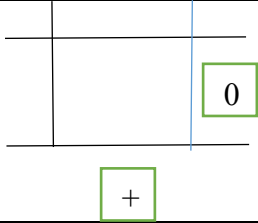
En conclusión, el Tablero de Tucker es una herramienta valiosa en programación lineal por su capacidad de simplificar el proceso de resolución de problemas, su eficiencia en el manejo de restricciones y variables, y su facilidad de interpretación de resultados. Su uso puede

mejorar significativamente la efectividad y la precisión en la búsqueda de soluciones óptimas en una amplia variedad de aplicaciones.

Resumiendo, el Tablero de Tucker permite observar con gran facilidad los siguientes casos:

	Los valores de costos son positivos y negativo algún elemento de la última columna. El Tablero indica: En su fase primal el origen no es parte del espacio convexo. Por lo que se debe usar la fase I en la parte primal o fase II de la parte dual.
	Algún valor de costos es negativo y positivos todos los elementos de la última columna. El Tablero indica: En su fase primal el origen es parte del espacio convexo. Se debe usar la fase II primal o fase I dual para localizar el óptimo.
	Tanto algún elemento de costos y algún elemento de la última columna tienen valor negativo. En su fase primal o fase dual el origen no es parte del espacio convexo. El Tablero indica que se necesita aplicar la fase I, ésta puede ser en el primal o en el dual.

	Existe al menos un cero en la hilera de costos. Además, es positivo en sus otros elementos, y es positiva la última columna. Este Tablero muestra que ya se está en el punto óptimo indicando paralelismo con una restricción, por lo que tiene ∞ soluciones.
---	--

	Existe al menos un cero en la última columna y es positiva la hilera de costos. Este Tablero muestra que ya se está en el punto óptimo, pero es degenerado.
---	--

Bibliografía

- Anton, H. &. (2010). *Elementary linear algebra (10.^a ed.)*. John Wiley & Sons.
- Arjona, G. B. (1987). *Introducción a la programación lineal y el análisis de sensibilidad*. Trillas.
- Atlanta Chakraborty, V. C. (2019). A linear programming primer: from Fourier to Karmarkar. *Annals of Operations Research*, 593–616.
- Bazaraa, M. S. (2010). *Linear programming and network*. John Wiley & Sons.
- Boyd, S. &. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press.
- Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton: PRINCETON UNIVERSITY PRESS.
- HOWARD ANTON, C. R. (2010). *Elementary Linear Algebra*. Nueva Jersey,: John Wiley & Sons, Inc.
- Jaime, H. P. (2023). Contribuciones de Leonid Kantorovich a la teoría de la asignación óptima de los recursos económicos de la programación lineal (1975). En B. H. Elita Luisa Rincón Castillo, *Contribuciones de los premios novel de Economía. Tomo II* (págs. 56-84). Guayaquil : Editorial Digráfica S.A.
- Taha, H. A. (2017). *Operations Research*. Malaysia: Pearson.
- Tucker, H. W. (3-18). Dual systems of homogeneous linear relations. *Linear inequalities and related systems*. Princeton University Press, Princeton University Press.
- WOLSEY, L. A. (1998). *Integer Programming*. Nueva Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Apéndice A. Eliminación gaussiana e intercambio de Jordan (cálculo detallado)

129

Caso A.1: Inversa de una matriz 3×3 .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Para obtener un pivote de 1 en la posición (1,1) sin introducir fracciones, sumamos el Renglón 2 al Renglón 1 ($R_1 \leftarrow R_1 + R_2$):

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2 \quad \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 7 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Paso 2: Con el nuevo pivote, eliminamos el valor en la posición (2,1) sumando el nuevo Renglón 1 al Renglón 2 ($R_2 \leftarrow R_2 + R_1$):

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_1 \quad \begin{array}{cccccc} -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 11 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Paso 3: Para convertir el 5 de la posición (2,2) en un 1 (nuevo pivote) evitando fracciones, restamos estratégicamente cuatro veces el Renglón 3 al Renglón 2 ($R_2 \leftarrow R_2 - 4R_3$):

$$R_2 \leftarrow R_2 - 4R_3 \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 5 & 11 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 0 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -4 \end{array}$$

Paso 4: Eliminamos el valor debajo del segundo pivote restando el Renglón 2 al Renglón 3 ($R_3 \leftarrow R_3 - R_2$):

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 5 \end{array}$$

Paso 5: Normalizamos el tercer pivote multiplicando el Renglón 3 por $1/4$ ($R_3 \leftarrow 1/4 R_3$):

129

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{4} R_3 \quad \begin{array}{cccccc} (1/4) 0 & (1/4) 0 & (1/4) 4 & (1/4) -1 & (1/4) -2 & (1/4) 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/2 & 5/4 \end{array}$$

Paso 6: Comenzamos la eliminación hacia arriba. Sumamos el Renglón 3 al Renglón 2 ($R_2 \leftarrow R_2 + R_3$):

$$R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \quad \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/2 & 5/4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 3/4 & 3/2 & -11/4 \end{array}$$

Paso 7: Eliminamos el valor en la posición (1,2) restando tres veces el Renglón 2 al Renglón 1 ($R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2$):

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2 \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -9/4 & -9/2 & 33/4 \\ \hline 1 & 0 & 7 & -5/4 & -7/2 & 33/4 \end{array}$$

Paso

8: Finalmente, eliminamos el valor en la posición (1,3) restando siete veces el Renglón 3 al Renglón 1 ($R_1 \leftarrow R_1 - 7R_3$):

$$R_1 \leftarrow R_1 - 7R_3 \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 7 & -5/4 & -7/2 & 33/4 \\ 0 & 0 & -7 & 7/4 & 7/2 & -35/4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}$$

$$IA^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{array} \right)$$

Realizamos el producto de matrices para validar el resultado, calculando cada entrada a_{ij} :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 2 (1/2) + 1 (3/4) + 3 (-1/4) = 1$$

$$a_{12} = 2 (0) + 1 (3/2) + 3 (-1/2) = 0$$

$$a_{13} = 2 (-1/2) + 1 (-11/4) + 3 (5/4) = 0$$

$$a_{21} = -1 (1/2) + 2 (3/4) + 4 (-1/4) = 0$$

$$a_{22} = -1 (0) + 2 (3/2) + 4 (-1/2) = 1$$

$$a_{23} = -1 (-1/2) + 2 (-11/4) + 4 (5/4) = 0$$

$$a_{31} = 0 (1/2) + 1 (3/4) + 3 (-1/4) = 0$$

$$a_{32} = 0 (0) + 1 (3/2) + 3 (-1/2) = 0$$

$$a_{33} = 0 (-1/2) + 1 (-11/4) + 3 (5/4) = 1$$

Apéndice B. Cambio de base.

Caso B.1: Inversa de una matriz 3x3 con intercambio de Jordan.

132

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Pivote: a_{11}

Los incisos de los cálculos corresponden a cada inciso del algoritmo del intercambio de Jordan.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| 1) $a_{11} = 1/(2) = 1/2$ | 4) $a_{22} = 2 - (-1*1)/(2) = 5/2$ |
| 2) $a_{12} = (1)/(2) = 1/2$ | $a_{32} = 1 - (0*1)/(2) = 1$ |
| $a_{13} = (3)/(2) = 3/2$ | $a_{23} = 4 - (-1*3)/(2) = 11/2$ |
| 3) $a_{21} = -(-1)/(2) = 1/2$ | $a_{33} = 3 - (0*3)/(2) = 3$ |
| $a_{31} = -(0)/(2) = 0$ | |

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 5/2 & 11/2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Segundo pivote: a_{22}

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1) $a_{22} = 1/(5/2) = 2/5$ | 4) $a_{11} = 1/2 - (1/2*1/2)/(5/2) = 2/5$ |
| 2) $a_{21} = (1/2)/(5/2) = 1/5$ | $a_{31} = 0 - (1*1/2)/(5/2) = -1/5$ |
| $a_{23} = (11/2)/(5/2) = 11/5$ | $a_{13} = 3/2 - (1/2*11/2)/(5/2) = 2/5$ |
| 3) $a_{12} = -(1/2)/(5/2) = -1/5$ | $a_{33} = 3 - (1*11/2)/(5/2) = 4/5$ |
| $a_{32} = -(1)/(5/2) = -2/5$ | |

$$\begin{vmatrix} 2/5 & -1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 11/5 \\ -1/5 & -2/5 & 4/5 \end{vmatrix}$$

Tercer pivote: a_{33}

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1) $a_{33} = 1/(4/5) = 5/4$ | 4) $a_{11} = 2/5 - (2/5*-1/5)/(4/5) = 1/2$ |
| 2) $a_{31} = (-1/5)/(4/5) = -1/4$ | $a_{21} = 1/5 - (11/5*-1/5)/(4/5) = 3/4$ |
| $a_{32} = (-2/5)/(4/5) = -1/2$ | $a_{12} = -1/5 - (2/5*-2/5)/(4/5) = 0$ |
| 3) $a_{13} = -(2/5)/(4/5) = -1/2$ | $a_{22} = 2/5 - (11/5*-2/5)/(4/5) = 3/2$ |
| $a_{23} = -(11/5)/(4/5) = -11/4$ | |

132

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/4 & 3/2 & -11/4 \\ -1/4 & -1/2 & 5/4 \end{vmatrix}$$

Comprobación

$$A \cdot A^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = (2)(1/2) + (1)(3/4) + (3)(-1/4) = 1 \quad a_{23} = (-1)(-1/2) + (2)(-11/4) + (4)(5/4) = 0$$

$$a_{12} = (2)(0) + (1)(3/2) + (3)(-1/2) = 0 \quad a_{31} = (0)(1/2) + (1)(3/4) + (3)(-1/4) = 0$$

$$a_{13} = (2)(-1/2) + (1)(-11/4) + (3)(5/4) = 0 \quad a_{32} = (0)(0) + (1)(3/2) + (3)(-1/2) = 0$$

$$a_{21} = (-1)(1/2) + (2)(3/4) + (4)(-1/4) = 0 \quad a_{33} = (0)(-1/2) + (1)(-11/4) + (3)(5/4) = 1$$

$$a_{22} = (-1)(0) + (2)(3/2) + (4)(-1/2) = 1$$

Caso B.2

$$y_1 = 2x_1 + x_2 = 2$$

$$y_2 = x_1 + 2x_2 = 2$$

$$y_3 = -x_1 + x_2 = 3$$

De esta forma, el sistema tiene **5 variables**:

$$(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$$

y **3 ecuaciones**.

El número de soluciones básicas posibles está dado por:

$$N = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Tabla inicial $|A|I|$

	x_1	x_2	b	y_1	y_2	y_3
y_1	2	1	2	1	0	0
y_2	1	2	2	0	1	0
y_3	-1	1	3	0	0	1

Cambio de base $y_1 \leftrightarrow x_1$

	y_1	x_2	b	x_1	y_2	y_3
x_1	1	$1/2$	1	$1/2$	0	0
y_2	0	$-3/2$	-1	$1/2$	-1	0
y_3	0	$3/2$	4	$1/2$	0	1

$P_1 (1, 0)$

Cambio de base $y_1 \leftrightarrow x_2$

	x_1	y_1	b	x_2	y_2	y_3
x_2	2	1	2	1	0	0
y_2	3	0	-4	0	1	-2
y_3	-3	0	1	-1	0	1

La siguiente intersección es:

$P_2 (0, 2)$

Cambio de base $y_2 \leftrightarrow x_1$

	y_2	x_2	b	y_1	x_1	y_3
y_1	0	3	2	-1	2	0
x_1	1	2	2	0	1	0
y_3	0	3	5	0	1	1

La siguiente intersección es:

$P_3 (2, 0)$

Cambio de base $y_2 \leftrightarrow x_2$

	x_1	y_2	b	y_1	x_2	y_3
y_1	3	0	-1	1	0	-1
x_2	1/2	1	1	0	1/2	0
y_3	-3/2	0	2	0	-1/2	1

Punto de intersección:

$$P_4 (0, 1)$$

Cambio de base $y_3 \leftrightarrow x_1$

	y_3	x_2	b	y_1	y_2	x_1
y_1	0	3	8	1	0	2
y_2	0	3	5	0	1	1
x_1	1	-1	-3	0	0	-1

Punto de intersección:

$$P_5 (-3, 0)$$

Cambio de base $y_3 \leftrightarrow x_2$

	x_1	y_3	b	y_1	y_2	x_2
y_1	3	0	-1	1	0	-1
y_2	-3	0	-2	-2	1	0
x_2	-1	1	3	0	0	1

Punto de intersección:

$$P_6 (0, 3)$$

Intersección entre rectas.

Se mostrarán las dos tablas equivalentes en cada una de las intersecciones de las rectas.

Intersección entre recta uno y recta dos.

Primer Tablero equivalente.

	y_1	y_2	b	x_1	x_2	y_3
x_1	1	0	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	0
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	0
y_3	0	0	3	1	-1	1

Punto de intersección:

$$P(\text{Intersección})_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Segundo Tablero equivalente.

	y_2	y_1	b	x_2	x_1	y_3
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	$2/3$	0
x_1	1	0	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	0
y_3	0	0	-3	-1	1	-1

Punto de intersección:

$$P(\text{Intersección})_1 \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Intersección entre la recta uno y la recta tres.

Primer Tablero equivalente

	y_1	y_3	b	x_1	y_2	x_2
x_1	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	$-1/3$
y_2	0	0	3	1	-1	1
x_2	0	1	$8/3$	$1/3$	0	$2/3$

Punto de intersección:

$$P(\text{Intersección})_2 \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

Segundo Tablero equivalente

	y_3	y_1	b	x_2	y_2	x_1
x_2	0	1	$8/3$	$1/3$	0	$2/3$
y_2	0	0	-3	-1	1	-1
x_1	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	$-1/3$

Punto de intersección:

$$P(\text{Intersección})_2 = (-1/3, 8/3)$$

Intersección de la recta dos con la recta tres

Primer Tablero equivalente

	y_2	y_3	b	y_1	x_1	x_2
y_1	0	0	-3	-1	1	-1
x_1	1	0	$-4/3$	0	$1/3$	$-2/3$
x_2	0	1	$5/3$	0	$1/3$	$1/3$

Punto de intersección:

$$P(\text{Intersección})_3 = (-4/3, 5/3)$$

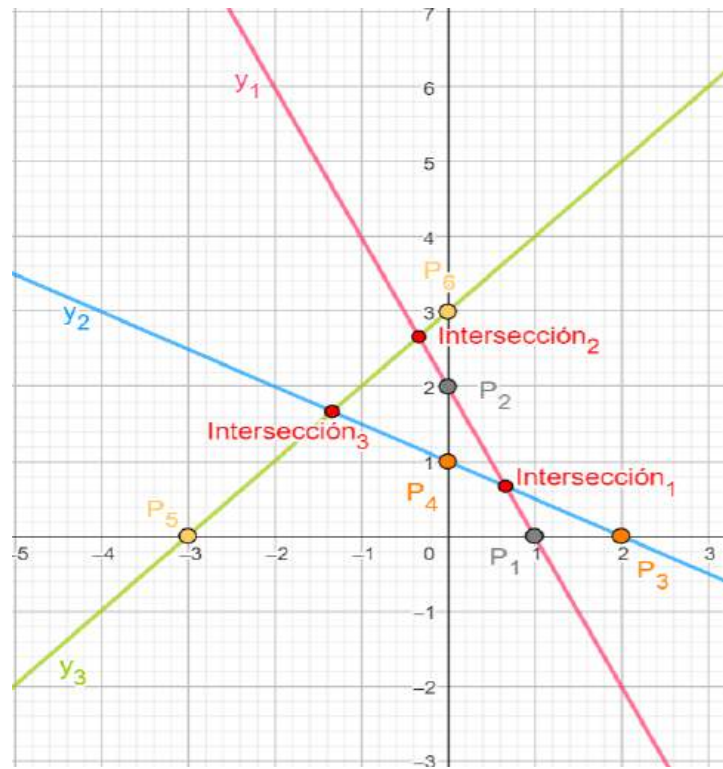
Segundo Tablero equivalente.

	y_3	y_2	b	y_1	x_2	x_1
y_1	0	0	3	1	-1	1
x_2	0	1	$5/3$	0	$1/3$	$1/3$
x_1	1	0	$-4/3$	0	$1/3$	$-2/3$

Punto de intersección:

$$P(\text{Intersección})_3 = (-4/3, 5/3)$$

Gráfica B.1. Los 10 cambios de base del caso B.2



Apéndice C. Tableros extendidos del método simplex

Caso C.1. Múltiples soluciones con tres dimensiones

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\text{S.A. } 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2$$

$$2x_2 + x_3 \leq 3$$

$$3x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

TABLERO C.1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	b	$\lambda(-x_3)$
y_1	2	2	4	2	0.5
y_2	0	2	1	3	3
y_3	3	-1	0	2	*
y_4	0	0	1	1	1
Z	-1	-1	-2	0	*

Dado que se trata de un problema en un espacio tridimensional que presenta óptimos alternos, la función objetivo alcanza su máximo valor en tres vértices adyacentes que comparten el mismo hiperplano. En consecuencia, cualquier punto contenido dentro de la **cara triangular** que conecta a estos tres vértices (es decir, cualquier combinación convexa de ellos) constituye también una solución óptima

Primera iteración

Del Tablero C.1:

Sale de la base y_1

Entra a la base x_3

Obteniéndose el Tablero .20.

TABLERO C.2

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	b	$\lambda(-x_1)$	$\lambda(-x_2)$
x_3	1/2	1/2	1/4	1/2	1	1
y_2	-1/2	3/2	-1/4	5/2	*	5/3
y_3	3	-1	0	2	2/3	*
y_4	-1/2	-1/2	-1/4	1/2	*	*
Z	0	0	1/2	1	*	*



Resultado:

$$P_1=(0,0,1), \quad z=1.$$

Segunda iteración:

Se tienen dos elementos con valor de cero en la fila de costos. Se toma como pivote la segunda columna. $\lambda_{\min}$,

Sale de la base x_3

Entra a la base x_2

TABLERO C.3

	$-x_1$	$-x_3$	$-y_1$	b	$\lambda(-x_1)$
x_2	1	2	1/2	1	1
y_2	-2	-3	-1	1	*
y_3	4	2	1/2	3	3/4
y_4	0	1	0	1	*
Z	0	0	1/2	1	*

Resultado:

$$P_2 = (0,1,0), \quad Z=1$$

Tercera iteración

Salí de la base y_3

Entra a la base x_1

Se obtiene el Tablero C.4.

TABLERO C.4

	$-y_3$	$-x_3$	$-y_1$	b
x_2	$-1/4$	$3/2$	$3/8$	$1/4$
y_2	$1/2$	-2	$-3/4$	$5/2$
x_1	$1/4$	$1/2$	$1/8$	$3/4$
y_4	0	1	0	1
Z	0	0	$1/2$	1

Resultado:

$$P_3 = (3/4, 1/4, 0), z=1.$$

Dado que el problema se desarrolla en tres dimensiones, la infinidad de soluciones recae sobre una faceta triangular del poliedro de restricciones. Esta región exacta queda delimitada por los siguientes tres puntos extremos identificados:

$$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (0, 1, 0), P_3 = (3/4, 1/4, 0)$$

Estos puntos definen una región plana dentro del espacio factible en la cual todos los puntos producen el mismo valor de la función objetivo. En consecuencia, cualquier combinación convexa de estos vértices también constituye una solución óptima.

Matemáticamente, esto significa que cualquier punto óptimo X dentro de esta región puede expresarse mediante la ecuación:

$$X = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$$

donde los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ representan las proporciones o pesos asignados a cada vértice, sujetos a la estricta condición de que su suma debe ser exactamente igual a uno ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$).

Desde la perspectiva de la toma de decisiones, la identificación de esta faceta óptima representa una ventaja analítica significativa. Al disponer de una infinidad de alternativas operativas que garantizan exactamente el mismo rendimiento máximo, el analista obtiene una flexibilidad invaluable. Esto permite seleccionar, de entre todas las soluciones contenidas en dicho triángulo, aquella que mejor satisfaga criterios secundarios o requerimientos no cuantificados originalmente en el modelo matemático

Caso C.2. El origen no pertenece a la región factible abierta

$$\text{Max } Z = -4x_1 - 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{S.A. } & -x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & -4x_1 - 2x_2 \leq -8 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, dado que los coeficientes de la función objetivo son negativos, cualquier incremento en las variables disminuirá el valor total. Por lo tanto, para que se optimice la función, se espera localizar el vértice de la región factible (intersección de las restricciones) cuyas coordenadas asuman los valores más pequeños posibles, idealmente los más cercanos al origen.

En el **Tablero C.5** se observa que existe un $b_i < 0$, por lo que es necesario aplicar la Fase I.

En el **Tablero C.6** se introduce la variable no básica ρ y la función objetivo auxiliar Z' . Haciendo el pivoteo adecuado se tiene como resultado el **Tablero C.7** donde ρ aparece como variable básica.

Posteriormente, se aplica la Fase II en los **Tablero C.8 y C.9**. En el **Tablero C.9** se observa que z' alcanza su valor máximo, la variable ρ está como variable no básica y toda $b_i > 0$.

Finalmente, en el **Tablero C.10** se muestra el sistema en el espacio $\mathbb{R}^n$, eliminando la variable ρ y la función objetivo auxiliar z' . El **Tablero C.10** corresponde a la solución óptima para $\mathbb{R}^n$ (observar la gráfica C.1)

TABLERO. C.5

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	-1	-1	1
y_2	-1	-2	-1
y_3	-4	-2	-8
y_4	1	-1	3
y_5	1	-1	-1
Z	4	5	0

TABLERO C.6

	$-x_1$	$-x_2$	ρ	b
y_1	-1	-1	0	1
y_2	-1	-2	-1	-1
y_3	-4	-2	-1	-8
y_4	1	-1	0	3
y_5	1	-1	-1	-1
Z	4	5	0	0
Z'	0	0	1	0

Tablero C.7

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_3$	b	$\lambda(-x_1)$
y_1	-1	-1	0	1	*
y_2	3	0	-1	7	$7/3$
ρ	4	2	-1	8	2
y_4	1	-1	0	3	3
y_5	5	1	-1	7	$7/5$
Z	4	5	0	0	*
Z'	-4	-2	1	-8	*

Tablero C.8

	$-y_5$	$-x_2$	$-y_3$	b	$\lambda(-x_2)$
y_1	$1/5$	$-4/5$	$-1/5$	$12/5$	*
y_2	$-3/5$	$-3/5$	$-2/5$	$14/5$	*
ρ	$-4/5$	$6/5$	$-1/5$	$12/5$	2
y_4	$-1/5$	$-6/5$	$1/5$	$8/5$	*
x_1	$1/5$	$1/5$	$-1/5$	$7/5$	7
Z	$-4/5$	$21/5$	$4/5$	$-28/5$	*
Z'	$4/5$	$-6/5$	$1/5$	$-12/5$	*

Tablero C.9

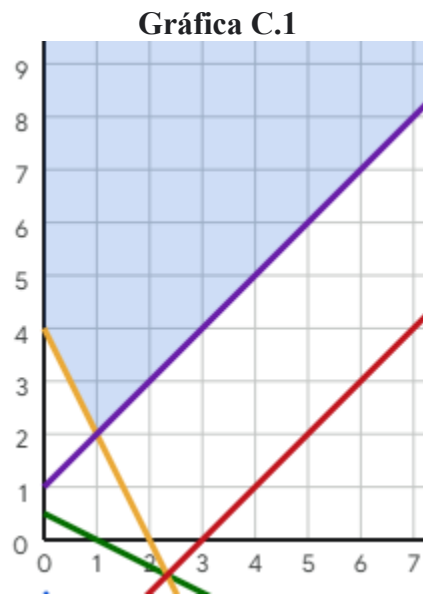


	$-y_5$	ρ	$-y_3$	b
y_1	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$	4
y_2	-1	$1/2$	$-1/2$	4
x_2	$-2/3$	$5/6$	$-1/6$	2
y_4	-1	1	0	4
x_1	$1/3$	$-1/6$	$-1/6$	1
Z	2	$-7/2$	$3/2$	-14
Z'	0	1	0	0

Tablero C.10

	$-y_5$	$-y_3$	b
y_1	$-1/3$	$-1/3$	4
y_2	-1	$-1/2$	4
x_2	$-2/3$	$-1/6$	2
y_4	-1	0	4
x_1	$1/3$	$-1/6$	1
Z	2	$3/2$	-14

Punto óptimo: $P_1(1, 2)$



Caso C.3

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.A. } x_1 + x_2 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En el **Tablero C.11**, el conjunto convexo no contiene al origen; por lo tanto, en el **Tablero C.12** se introduce una dimensión adicional y una función objetivo auxiliar z' .

Los **Tableros C.13, C.14 y C.15** se utilizan para localizar el óptimo en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.

En el **Tablero C.16** se observa que se ha eliminado la dimensión adicional, regresando al espacio $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, los **Tableros C.16 y C.17** se emplean para localizar el óptimo en $\mathbb{R}^n$. En el **Tablero C.17** se observa que la función objetivo alcanza el vértice óptimo.

Tablero C.11

	$-x_1$	$-x_2$	b
y_1	-1	-1	-3
y_2	1	-1	-1
y_3	0	1	4
Z	-1	-2	0

Tablero C.12

	$-x_1$	$-x_2$	ρ	b
y_1	-1	-1	-1	-3
y_2	1	-1	-1	-1
y_3	0	1	0	4
Z	-1	-2	0	0
Z'	0	0	1	0

Tablero C.13

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	b	$\lambda(-x_1)$	$\lambda(-x_2)$
ρ	1	1	-1	3	3	3
y_2	2	0	-1	2	1	*
y_3	0	1	0	4	*	4
Z	-1	-2	0	0	*	*
Z'	-1	-1	1	-3	*	*

Tablero C.14

	$-y_2$	$-x_2$	$-y_1$	b	$\lambda(-x_2)$
ρ	-1/2	1	-1/2	2	2
x_1	1/2	0	-1/2	1	*
y_3	0	1	0	4	4
Z	1/2	-2	-1/2	1	*
Z'	1/2	-1	1/2	-2	*

Tablero C.15

↓

	$-y_2$	ρ	$-y_1$	b
x_2	$-1/2$	1	$-1/2$	2
x_1	$1/2$	0	$-1/2$	1
y_3	$1/2$	-1	$1/2$	2
Z	$-1/2$	2	$-3/2$	5
Z'	0	1	0	0

Tablero C.16

	$-y_2$	$-y_1$	b	$\lambda(-y_1)$
x_2	$-1/2$	$-1/2$	2	*
x_1	$1/2$	$-1/2$	1	*
y_3	$1/2$	1/2	2	4
Z	$-1/2$	$-3/2$	5	*

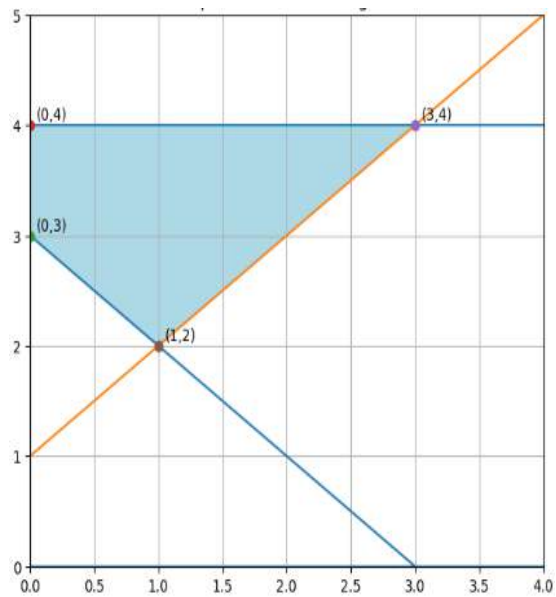
Tablero C.17

	$-y_2$	$-y_3$	b
x_2	0	1	4
x_1	1	1	3
y_1	1	2	4
Z	1	3	11

Punto óptimo: $P_1 = (3, 4)$

En la gráfica C.2 se muestra el espacio convexo.

Gráfica C.2



Apéndice D. Desarrollo completo del método de ramificación y acotamiento

151

Caso D.1

$$\text{Max. } Z = 40x_1 + 80x_2 + 130x_3$$

$$\text{S. A. } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 85$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 150$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 160$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ Enteras}$$

$Z = -\infty$. En el Tablero D.1 se muestra el punto de inicio. En el Tablero D.2 se muestra el óptimo donde todas las variables tienen un valor fraccional.

Tablero D.1

	x_1	x_2	x_3	1
y_0	1.0	1.0	2.0	85.0
y_1	1.0	3.0	4.0	150.0
y_2	1.0	2.0	5.0	160.0
z	-40.0	-80.0	-130.0	0.0

Tablero D.2. Nodo 1

	y_0	y_1	y_2	1
x_1	1.74	-0.24	-0.5	31.25
x_2	-0.24	0.75	-0.5	11.25
x_3	-0.25	-0.25	0.5	21.25
z	17.5	17.5	5.0	4912.5

Se inicia la búsqueda, por lo que se escoge la variable x_1 . El Tablero D.3 muestra el óptimo con la restricción $x_1 \leq 31$ y el Tablero D.4 $x_1 \geq 32$

Tablero D.3. $x_1 \leq 31$. Nodo 2

	y_3	y_1	y_2	1
y_0	-0.57	-0.14	-0.28	0.14
x_2	-0.14	0.71	-0.57	11.28
x_3	-0.14	-0.28	0.42	21.28
x_1	1.0	0.0	0.0	31.0
z	10.0	20.0	10.0	4910.0

Tablero D.4. $x_1 \geq 32$. Nodo 3

	y_0	y_1	y_3	1
x_2	-2.0	1.0	-1.0	12.0
y_2	-3.49	0.49	-2.0	1.5
x_3	1.5	-0.5	1.0	20.5
x_1	0.0	0.0	-1.0	32.0
z	35.0	15.0	10.0	4905.0

Se observa que $W_2 > W_3$. Por lo que se va a ramificar en ese nodo. Tanto x_2 como x_3 tienen la misma fracción (0.28). En este caso se escoge x_2 con las restricciones $x_2 \leq 11$ y $x_2 \geq 12$. Los óptimos con tales restricciones se observan en el Tablero D.5 para $x_2 \leq 11$ y Tablero D.6 para $x_2 \geq 12$.

151

Tablero D.5. $x_2 \leq 11$. Nodo 4

	y3	y4	y2	1
y0	-0.6	-0.19	-0.4	0.19
y1	-0.19	-1.4	-0.8	0.4
x3	-0.2	-0.4	0.2	21.4
x1	1.0	0.0	0.0	31.0
x2	0.0	1.0	0.0	11.0
z	14.0	28.0	26.0	4902.0

Tablero D.6. $x_2 \geq 12$. Nodo 5

	y4	y3	y1	1
y0	-0.5	-0.5	-0.5	0.49
x1	0.0	1.0	0.0	31.0
x3	0.75	-0.25	0.25	20.74
y2	-1.74	0.24	-1.25	1.25
x2	-1.0	0.0	0.0	12.0
z	17.5	7.5	32.5	4897.5

$W_3 > W_4$, por lo que se ramifica el nodo 3 con $x_3 \leq 20$ creando el nodo 6 y $x_3 \geq 21$ para crear el nodo 7.

Tablero D.7. $x_3 \leq 20$. Nodo 6

	y1	y4	y0	1
y3	-0.5	-1.0	1.5	0.49
x2	0.5	-1.0	-0.5	12.5
y2	-0.5	-2.0	-0.5	2.49
x1	-0.5	-1.0	1.5	32.5
x3	0.0	1.0	0.0	20.0
z	19.99	10.0	20.0	4900.0

Tablero D.8. $x_3 \geq 21$. Nodo 7.

	y4	y0	y3	1
x2	2.0	1.0	1.0	11.0
y1	-2.0	-3.0	-2.0	0.99
y2	0.99	-2.0	-1.0	0.99
x3	-1.0	0.0	0.0	21.0
x1	0.0	0.0	-1.0	32.0
z	30.0	80.0	40.0	4890.0

En el nodo 7 se tiene un óptimo entero, por lo que $\underline{Z}=4890$.

Como $W_6 > W_5$, $W_4 > W_6$ y $W_4 > \underline{Z}$, se realiza una ramificación en el nodo 4.

Tablero D.9. $x_3 \leq 21$. Nodo 8

	y3	y4	y5	1
y0	-1.0	-1.0	-2.0	1.0
y1	-1.0	-3.0	-4.0	2.0
y2	-1.0	-2.0	-5.0	2.0
x1	1.0	0.0	0.0	31.0
x2	0.0	1.0	0.0	11.0
x3	0.0	0.0	1.0	21.0
z	40.0	80.0	130.0	4850.0

Tablero D.10. $x_3 \geq 22$. Nodo 9.

	y5	y4	y2	1
y0	-3.0	1.0	-1.0	1.99
y1	-0.99	-1.0	-1.0	1.0
x1	5.0	-2.0	1.0	28.0
y3	-5.0	2.0	-1.0	3.0
x2	0.0	1.0	0.0	11.0
x3	-1.0	0.0	0.0	22.0
z	70.0	0.0	40.0	4860.0

Tanto el nodo 8 como el nodo 9 son óptimos enteros siendo $Z_8 < Z_9 < \underline{Z}$, se mantiene el valor de $\underline{Z}=4890$. Los nodos que aún permanecen abiertos son $W_5=4897$ y $W_6=4900$. Ambos nodos con un óptimo real mayor a $\underline{Z}$. Siendo $W_6 > W_5$, se hace una ramificación en W_6 con $x_2 \leq 12$ y $x_2 \geq 13$. Creándose el nodo 10 para $x_2 \leq 12$ y nodo 11 para $x_2 \geq 13$. Ambos resultados se muestran en el Tablero D.11 y Tablero D.12 respectivamente.

Tablero D.11. $x_2 \leq 12$. Nodo 10

	y5	y4	y0	1
y3	-1.0	-2.0	1.0	1.0
y1	-2.0	-2.0	-1.0	1.0
y2	-1.0	-3.0	-1.0	3.0
x1	-1.0	-2.0	1.0	33.0
x3	0.0	1.0	0.0	20.0
x2	1.0	0.0	0.0	12.0
z	40.0	50.0	40.0	4880.0

Tablero D.12. $x_2 \geq 13$. Nodo 11.

	y1	y4	y0	1
y3	-0.5	-1.0	1.5	18.5
y5	0.5	-1.0	-0.5	17.49
y2	-0.5	-2.0	-0.5	38.5
x2	0.5	-1.0	-0.5	30.49
x3	0.0	1.0	0.0	2.0
x1	-0.5	-1.0	1.5	50.5
z	19.99	10.0	20.0	4720.0

El nodo 10 es entero, pero menor a $\underline{Z}$. El nodo 11 se descarta ya que $W_{11} \leq \underline{Z}$. Aún queda por explorar el nodo 5 ya que $W_5 > \underline{Z}$. Se crean el nodo 12 con $x_3 \leq 20$ y nodo 13 $x_3 \geq 21$. El resultado se puede observar en el Tablero D.13 y Tablero D.14 respectivamente.

Tablero D.13. $x_3 \leq 20$. Nodo 12

	y3	y5	y1	1
y0	-0.66	-0.66	-0.33	1.0
y4	-0.33	-1.33	0.33	0.99
y2	-0.33	-2.33	-0.66	3.0
x1	1.0	0.0	0.0	31.0
x2	-0.33	-1.33	0.33	12.99
x3	0.0	1.0	0.0	20.0
z	13.33	23.33	26.66	4880.0

Tablero D.14. $x_3 \geq 21$. Nodo 13.

	y4	y1	y5	1
y0	-2.0	-1.0	-2.0	0.99
x1	3.0	1.0	4.0	30.0
y2	-1.0	-1.0	0.99	0.99
y3	-3.0	-1.0	-4.0	0.99
x3	0.0	0.0	-1.0	21.0
x2	-1.0	0.0	0.0	12.0
z	40.0	40.0	30.0	4890.0

El nodo 12 tiene solo variables enteras, sin embargo, $Z_{12} < \underline{Z}$. El nodo 13 tiene solo variables enteras, y, además, $Z_{13} = \underline{Z}$. Por lo que se tiene un óptimo alternativo. De esta forma, los valores óptimos enteros se localizan en el nodo 7 y el nodo 13. En la gráfica D.1 se muestra el árbol binario

Gráfica D.1

